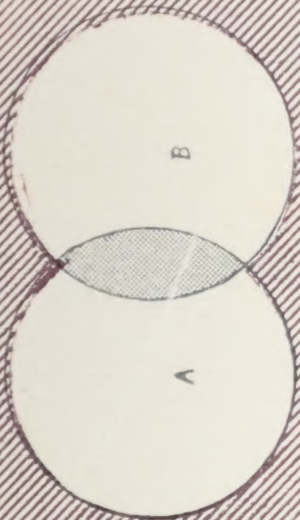


PREUNIVERSITY MATHEMATICS

ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

PART I
ಭಾಗ 1

ALGEBRA AND ELEMENTARY CALCULUS
ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

A BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION

PREUNIVERSITY MATHEMATICS

ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

PART I

ALGEBRA AND ELEMENTARY CALCULUS

ಭಾಗ 1

ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

A BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION

BANGALORE UNIVERSITY

MATHEMATICS TEXT BOOK COMMITTEE

PROF. F. J. NORONHA (*Chairman*)
DR C. N. SRINIVASIENGAR
SRI G. T. NARAYANA RAO
SRI D. V. RAMANNA
SRI K. R. SRIKANTIAH
SRI D. S. CHANDRASEKHARIAH

Price: Rs 4

FOREWORD

A Committee for Kannada Textbooks has been set up by this University to prepare textbooks for courses of study in Arts, Science and Commerce, since there is a persistent need experienced by quite a few students to study the various subjects in the regional language. This book on Algebra and Elementary Calculus is the first in the series to be published by the University. It is expected that many more will follow. The University is grateful to Prof. F. J. Noronha and his colleagues for having prepared this book. It is easy to have a textbook in Mathematics both in English and in the regional language. This may not necessarily be the pattern for books on other subjects. This bilingual production is, however expected to serve a useful purpose.

Bangalore University,
Bangalore,
Dated 1st December 1967

V. K. GOKAK,
Vice-Chancellor

PREFACE

This book has been written to meet the requirements of the new syllabus in Mathematics for the Preuniversity Course as recommended by the Mathematics Reforms Committee of the University Grants Commission 1966. This syllabus, with slight modifications, has been approved by the Boards of Studies in Mathematics of the Mysore, Karnatak and Bangalore Universities.

This text book is published in two parts. Part I consists of Algebra and Elementary Calculus while Part II comprises Geometry and Trigonometry. Important new topics included are: Elementary Set Theory, Number Systems, Determinants, Elements of Differential Calculus and Analytical Geometry. These will provide a stronger mathematical background for students proceeding to Degree Courses in Mathematics, Physics and Engineering

A special feature of this book is the simultaneous presentation of the subject matter in English and Kannada. At each page the student has ready access to both English and Kannada versions of the same topic. This, we believe, will be of great help to the vast majority of the students of the Mysore State whose mother tongue is Kannada. It is found by experience that by reading the subject in both languages they will grasp more easily the new mathematical concepts.

The text has been prepared by a Committee appointed by the Bangalore University. The members of the Committee are grateful to the Vice Chancellor, *Padmashri* Dr V. K. Gokak and the University Authorities for their approval and support in this venture. We also thank Dr R. S. Mugali, Chairman of the Kannada Textbook Committee, for initially sponsoring the proposal.

I take this opportunity to thank Sri M. A. Srirama, Director, Sri B. N. Ramamurthy, Senior Deputy Director, and all concerned in the Government Press for the speed and efficiency with which

they have produced this book. The diagrams were drawn by Sri K. N. Gopala Rao of the Department of Civil Engineering, University College of Engineering.

I also wish to express my sincere gratitude to my colleagues on the Committee for their enthusiastic cooperation in the arduous work of preparing the text in both languages. I particularly thank Dr C. N. Srinivasiengar, Retired Professor of Mathematics, who read every word of the manuscript and offered valuable suggestions. Sri G. T. Narayana Rao, in addition to writing parts of the text, played a major role in reading the proofs and assisting the Press. Sriyuths D. V. Ramanna, K. R. Srikantiah and D. S. Chandrasekhariah made valuable contributions in both English and Kannada.

I conclude with best wishes to all the young students of the Preuniversity Course who will be using this text book. I hope that their interest in the New Mathematics will be greatly stimulated by the bilingual presentation of the subject in this Bangalore University Publication.

F. J. NORONHA,
Chairman,
Mathematics Text Book Committee,
Bangalore University

CENTRAL COLLEGE,
BANGALORE,
1st March 1968

CONTENTS -- ವಿಷಯಸೂಚಿ

ALGEBRA

ಬೀಜಗಣಿತ

CHAPTER 1

Elementary Theory of Sets

1.1 Definition of a set—The idea of a set is quite simple and common. A set is a collection of objects of any kind which are grouped together because of some property which they have in common.

Here are some familiar examples of sets :—

A : The set of students in your class

B : The set of teachers in your College

C : The set of books in your College library

D : The inhabitants of your town

E : The States in India

F : The set of numbers $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

N : The set of counting numbers $\{1, 2, 3, \ldots\}$

I : The set of integers $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

The last two sets are very important in mathematics and will be referred to often in the next chapter. Unless otherwise stated, N will denote the set of counting numbers, or natural numbers, and I will denote the set of integers.

1.2 Elements—A set is determined only when we know definitely which objects it contains. There must be no ambiguity or doubt in the definition. For example the statement : "The set of tall boys in the class" does not define a set in the mathematical sense, for there will always be some doubt as to which boys are to be considered tall !

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಸುಲಭ ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ

1·1 ಗಣ ಎಂದರೇನು ?

ಗಣ ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಅತಿ ಸುಲಭವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವೂ ಆಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣ ವಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಸಮುದಾಯವೇ ಗಣ. ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಗಣಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

A : ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ

B : ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳ ಗಣ

C : ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಪುಸ್ತಕ ಭಂಡಾರದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಗಣ

D : ನಿಮ್ಮ ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಜನರ ಗಣ

E : ಭಾರತದ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳು

F : ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

N : ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

I : ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುವುಗಳು. ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಆಗಿಂದಾಗ್ಗೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೇರೆ ಏನೂ ಹೇಳದಿದ್ದರೆ, N ಎಂಬುದು ಎಣಿಕೆಯ ಅಥವಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನೂ, I ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು.

1·2 ಗಣಾಂಶಗಳು

ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು ಯಾವುವು ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಆ ಗಣವು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುವುದು. ಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಶಯ ವಾಗಲೀ ಅಥವಾ ದ್ವಂದ್ವಾರ್ಥವಾಗಲೀ ಇರಕೂಡದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ " ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ " ಎನ್ನುವ ವಾಕ್ಯವು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ, ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎತ್ತರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ ಸಂಶಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬರುವುದು!

The objects which make up a set are called its *elements*. In the examples of para 1.1, the elements of the set A are the students of your class, the elements of the set C are the books in your College library, and so on.

You will notice that the number of elements in each of the sets A, B, C, D, E and F is finite. The set F has 10 elements and the number in each of the preceding sets can be counted. Such sets are called *finite sets.*

On the other hand we cannot count the number of elements in the sets N and I. Such sets are called *infinite sets.*

1.3 The Sign of "Belonging to"—$\in$—We usually denote sets by capital letters and elements by small letters. Let a be an object and E a set. If a is an element of E we denote this by writing $a \in E$. The symbol $\in$ is read as "is an element of" or "belongs to".

If a is not an element of E, we denote this by writing $a \notin E$. We read this as : "a is not an element of E" or "a does not belong to E".

Thus for the set of natural numbers N. we can write :

$$2 \in N, \quad 5 \in N, \quad -2 \notin N, \quad \tfrac{1}{4} \notin N$$

We now state an important relationship between objects and sets. If E is a given set and x any object, then one and only one of the following statements is true :—

$$\text{Either } x \in E \quad \text{or} \quad x \notin E$$

1.4 Methods of defining and representing sets— There are two methods commonly used to define a set —

(i) the Tabulation Method (or "Roster" Method) and
(ii) the Rule Method.

ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಗಣಾಂಶಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. 1.1ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳು, ನಿಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕ ಭಂಡಾರದ ಪುಸ್ತಕಗಳೆಲ್ಲವೂ C ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ.

A, B, C, D, E ಮತ್ತು F ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪರ್ಯಾಪ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. F ಗಣದಲ್ಲಿ 10 ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿನ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಸಿ ಬಿಡಬಹುದು. ಇಂತಹ ಗಣಗಳಿಗೆ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಗಣಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಆದರೆ, N ಮತ್ತು I ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ಗಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1·3 $\in$ ಚಿಹ್ನೆಯ ವಿವರಣೆ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಗಳನ್ನು A, B, C ಮುಂತಾದ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು a, b, c ಮುಂತಾದ ಚಿಕ್ಕ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. a ಎಂಬುದು E ಗಣದ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾದರೆ ಅದನ್ನು $a \in E$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\in$ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ". . . ಎಂಬುದರ ಗಣಾಂಶ" ಅಥವಾ ". . . ಇದಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆ" ಎಂದು ಓದಬೇಕು. a ಯು E ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ $a \notin E$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು "a ಯು E ಎಂಬುದರ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲ" ಅಥವಾ "a ಯು E ಗೆ ಸೇರಿಲ್ಲ" ಎಂದು ಓದಬೇಕು.

ಹೀಗೆಯೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ N [ಎಂಬುದನ್ನು] ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ $2 \in N$, $5 \in N$, $-2 \notin N$, $\frac{1}{4} \notin N$

ಈಗ ನಾವು ವಸ್ತುಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಗಣಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸೋಣ. E ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗಣವೂ, x ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಸ್ತುವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು :

$$x \in E \text{ ಅಥವಾ } x \notin E$$

1·4 ಗಣಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವ ಮತ್ತು ನಿರೂಪಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಗಣಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ.

(i) ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು (ii) ಗುಣ ವಿಧಾನ.

In the Tabulation method, all the elements are written down within curly brackets $\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$. If there are too many elements, the first few are written down in such a way as to indicate clearly what the others are.

Examples :

$G=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. G is the set consisting of the 5 numbers appearing within the brackets.

$O=\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\ldots\}$, the set O consists of *all* odd positive integers. The dots indicate that there is no last element to the set.

In the Rule method, we specify the set by stating a characteristic property which all the elements of the set possess and which no other object possesses.

Examples :

(i) "A is the set of students of our class".

This statement can be written symbolically as follows :

$$A=\{x \mid x \text{ is a student of our class}\}$$

We read the above as : "A is the set of elements x such that x is a student of our class". The vertical line within the brackets stands for "such that". The student must become familiar with this notation.

(ii) $G=\{x \mid x \text{ is a positive odd integer less than } 10\}$

"G is the set of elements x such that x is a positive odd integer less than 10." We easily compute the elements of G as the numbers 1, 3, 5, 7, 9. Hence we may also represent G by the tabulation method as follows : $G=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಪುಷ್ಪಾವರಣದಲ್ಲಿ {...............} ಬರೆಯಲಾಗುವುದು. ಗಣಾಂಶಗಳು ಬಹಳವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಊಹಿಸಲು ಶಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $G=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Gಯು ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

$O=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. O ಗಣವು ಎಲ್ಲಾ ಧನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವುದು. ಅಲ್ಲಿರುವ ಚುಕೆಗಳು ಗಣದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಗಣಾಂಶ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುವು.

ಗುಣ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಇತರ ಯಾವ ವಸ್ತುಗಳೂ ಹೊಂದಿರದ, ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣದಿಂದ ಗಣವನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: (i) " A ಎಂಬುದು ನಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ".

ಈ ವಾಕ್ಯವನ್ನೇ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$A=\{x \mid x$ ನಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ$\}$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ: " A ಎಂಬುದು ನಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿರುವಂಥ x ಎಂಬ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ ". ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು "ಅಂಥ" ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಈ ಸಾಂಕೇತಿಕ ನಿರೂಪಣಾ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(ii) $G=\{x \mid x$ ಎಂಬುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಧನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

"G ಎಂಬುದು, 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಧನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂಥ x ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ". Gಯ ಗಣಾಂಶಗಳು 1, 3, 5, 7, 9 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು G ಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$G=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(iii) $H = \{x \mid x \in N \text{ and } x \text{ divides } 15\}$

"H is the set of elements x such that x belongs to the set of natural numbers and x divides 15."

To identify the elements of H, we have to find those natural numbers which divide 15. These are obviously 1, 3, 5, 15. Hence we can also write $H = \{1, 3, 5, 15\}$.

1.5 Equal Sets —Two sets A and B are said to be equal if each element of A is also an element of B, and each element of B is also an element of A. We denote equality by writing $A = B$.

Example :

Let $A = \{1, 0, -2, 5, 7, -3\}$ and $B = \{-3, -2, 0, 1, 5, 7\}$.

It is easy to verify that $A = B$.

The following are three important properties of equality of sets :—

(i) For every set A, we have $A = A$.
This is called the *reflexive* property.

(ii) If $A = B$, then $B = A$.
This is the *symmetric* property.

(iii) If $A = B$ and $B = C$, then $A = C$.
This is called the *transitive* property.

Proof of the transitive property :—

Given $A = B$ and $B = C$. To prove that $A = C$.

Let x be *any* element of A.

Since $A = B$, $\therefore x \in B$.

Again since $B = C$, $\therefore x \in C$.

(iii) $H = \{x \mid x \in N$ ಮತ್ತು x ಎಂಬುದು 15ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದು$\}$

"H ಎಂಬುದು, 15ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವಂಥ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂಬ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ." Hನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು, 15ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ 1, 3, 5, 15 ಎಂಬುವುಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $H = \{1, 3, 5, 15\}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

1·5 ಸಮಗಣಗಳು

A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವು B ಯ ಗಣಾಂಶವಾಗಿಯೂ, B ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವು A ಯ ಗಣಾಂಶವಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮಗಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇವುಗಳ ಸಮತ್ವವನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A = \{1, 0, -2, 5, 7, -3\}$,

$B = \{-3, -2, 0, 1, 5, 7\}$

$A = B$ ಎಂದು ತಾಳೆನೋಡುವುದು ಬಹು ಸುಲಭ.

ಗಣಗಳ ಸಮತ್ವದ ಮೂರು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ :

(i) ಯಾವುದೇ ಗಣ A ಗೆ $A = A$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಫಲನ ಗುಣವೆಂದು ಹೆಸರು.

(ii) $A = B$ ಆದರೆ, $B = A$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂಗ ಗುಣವೆಂದು ಹೆಸರು.

(iii) $A = B$ ಮತ್ತು $B = C$ ಆಗಿದ್ದರೆ $A = C$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ವಾಹಕ ಗುಣವೆಂದು ಹೆಸರು.

ವಾಹಕಗುಣದ ಸಾಧನೆ :

$A = B$ ಮತ್ತು $B = C$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ, $A = C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು.
x ಎಂಬುದು Aಗೆ ಸೇರಿದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗಣಾಂಶವಾಗಿರಲಿ.
$A = B$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x \in B$.
ಪುನಃ $B = C$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x \in C$.

Hence every element of A is also an element of C.....(a

Now let y be *any* element of C.

Since $B=C$, $\therefore y \in B$.

Again since $A=B$, $\therefore y \in A$.

Hence every element of C is also an element of A.....(b)
Combining (a) and (b) we get, by definition, $A=C$.

Exercises 1.1

1 Let $S=\{-3, 1, 0\ 2, -8\}$. Indicate which of the following statements are true and which are false :—

(i) $3 \in S$ (ii) $2 \in S$ (iii) $3 \notin S$ (iv) $-3 \in S$
(v) $-8 \notin S$ (vi) $1 \in S$ (vii) $0 \in S$ (viii) $8 \in S$.

2 Use both the rule method and the tabulation method to specify the following sets :—

(*a*) The mathematics teachers in your College.
(*b*) The divisors (or factors) of 12.
(*c*) The natural numbers which are multiples of 5 and less than 50.
(*d* The set of all prime numbers less than 20.

3 Use the rule method to specify the following sets :—

a The citizens of Ind a.
(*b*) The past students of your College.
(*c*) Rational numbers between 0 and 1.
(*d*) All prime numbers greater than 25.

Can the tabulation method be used to specify the above sets ? Explain the difficulty, if any.

ಆದ್ದರಿಂದ A ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ C ಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುವುದು. ....(a)

ಈಗ y ಎಂಬುದು C ಯ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗಣಾಂಶವಾಗಿರಲಿ.

$B=C$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $y \in B$.

ಪುನಃ $A=B$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $y \in A$

ಆದ್ದರಿಂದ C ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ A ಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುವುದು. ....(b)

(a) ಮತ್ತು (b) ಗಳೆರಡರಿಂದ $A=C$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1·1

1 $S=\{-3, 1, 0, 2, -8\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ತಪ್ಪು ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ.

(i) $3 \in S$ (ii) $2 \in S$ (iii) $3 \notin S$ (iv) $-3 \notin S$ (v) $-8 \in S$ (vi) $1 \in S$ (vii) $0 \in S$ (viii) $8 \in S$.

2 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲು ಗುಣವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನಗಳೆರಡನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

(a) ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಗಣಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರುಗಳ ಗಣ.

(b) 12ರ ಭಾಜಕಗಳು (ಅಪವರ್ತನಗಳು).

(c) 5ರ ಗುಣಕವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು 50ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(d) 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

3 ಗುಣ ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ

(a) ಭಾರತದ ಪ್ರಜೆಗಳು.

(b) ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಹಳೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

(c) 0 ಮತ್ತು 1 ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(d) 25ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಮೇಲಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲು ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಬಹುದೇ? ಏನಾದರೂ ತೊಡಕುಗಳಿದ್ದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿ.

4 Use the tabulation method to specify the following sets :—

(*a*) $A=\{x \mid x \in I \text{ and } x^2=1\}$

(*b*) $A=\{x \mid x$ is a fraction whose numerator is 1 and denominator a counting number less than $7\}$

(*c*) $A=\{x \mid x$ is an even counting number less than $11\}$.

(*d*) $A=\{x \mid x$ is the square of a counting number and $2<x<40\}$

5 In the following sets identify which are equal :—

$A=\{-2, 2\}$, $C=\{x \mid x^2=4\}$, $D=\{a, b, c\}$

$E=\{x \mid x \in N \text{ and } 1<x<5\}$, $F=\{c, a, b\}$,

$G=\{4, 2, 3\}$.

6 For each of the following sets state which is finite and which is infinite :—

(*a*) The set of points on a given line.

(*b*) The set of points on a given line at a distance of one unit from a given point on the line.

(*c*) The set of points in a given plane which are at a distance of one unit from a given point in that plane.

(*d*) The integers between -3 and 3.

1.6 Subsets—A set A is said to be a subset of a set B if every element of A is also an element of B. We denote this relationship symbolically by writing $A \subset B$. The symbol $\subset$ is read as "is a subset of" or "is contained in".

The same relationship may be written as $B \supset A$, which we read as "B contains A."

4 ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ

(*a*) $A=\{x \mid x \in I$ ಮತ್ತು $x^2=1\}$

(*b*) $A=\{x \mid x$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶವು 1 ಮತ್ತು ಛೇದವು 7ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(*c*) $A=\{x \mid x$ ಎಂಬುದು 11ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಎಣಿಕೆಯ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(*d*) $A=\{x \mid x$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಮತ್ತು $2<x<40\}$

5 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಗಣಗಳೆಂದು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ:

$A=\{-2, 2\}$, $C=\{x \mid x^2=4\}$, $D=\{a, b, c\}$

$E=\{x \mid x \in N$ ಮತ್ತು $1<x<5\}$, $F=\{c, a, b\}$,

$G=\{4, 2, 3\}$.

6 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣವೂ ಪರ್ಯಾಪ್ತವೇ ಅಥವಾ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ:

(*a*) ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

(*b*) ದತ್ತ ರೇಖೆಯಮೇಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

(*c*) ದತ್ತ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

(*d*) -3 ಮತ್ತು 3ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

1.6 ಉಪಗಣಗಳು

A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ Aಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ Bಯ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದ್ದರೆ, Aಯನ್ನು Bಯ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \subset B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. $\subset$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು "....ಯ ಉಪಗಣ" ಅಥವಾ "........ಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿದೆ" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $B \supset A$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು "B ಎಂಬುದು Aಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

Referring to the definition of equality of sets, we can restate that definition in the following form —

$A = B$ if and only if $A \subset B$ and $B \subset A$.

Examples :

(i) Let A be the set of students of your class and B the set of students of your College. Obviously $A \subset B$.

(ii) Let $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, and $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Then $A \subset C$, $B \subset C$, and $A \subset B$.

PROPERTIES OF INCLUSION—(i) For every set A, we have $A \subset A$. This is the *reflexive* property.

(ii) If $A \subset B$ and $B \subset A$, then $A = B$. This is called the *anti-symmetric* property.

(iii) If $A \subset B$ and $B \subset C$, then $A \subset C$. This is the *transitive* property.

The student should compare these three properties with the corresponding properties of equality of sets stated in para 1.5. He will notice the difference between the symmetric property of equality and the anti-symmetric property of inclusion. In the case of inclusion, if $A \subset B$, it does not necessarily follow that $B \subset A$, since B may contain elements which are not in A.

If $A \subset B$ and B contains elements which are not in A, then A is called a *proper subset* of B.

Example :—Let A be the set of all students of your College and B the set of all students of your City. Then A is a proper subset of B. Why?

ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಮತ್ವದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಪುನಃ ಬರೆಯಬಹುದು.

$A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $A=B$ ಆಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :—

(i) Aಯು ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವೂ ಮತ್ತು B ಎಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವೂ ಆಗಿರಲಿ. $A \subset B$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

(ii) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 7\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ಎಂಬ ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

$A \subset C$, $B \subset C$ ಮತ್ತು $A \subset B$.

ಒಳಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಗುಣಗಳು

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣ A ಗೂ $A \subset A$ ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಫಲನ ಗುಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

(ii) $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆದರೆ $A=B$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದಕೆ ಅಸಮಾಂಗ ಗುಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

(iii) $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset C$ ಆದರೆ $A \subset C$ ಆಗಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ವಾಹಕ ಗುಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಈ ಮೂರು ಗುಣಗಳನ್ನು 1.5ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಸಮತೆಯ ಗುಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಬೇಕು. ಸಮತೆಯ ಸಮಾಂಗ ಗುಣಕ್ಕೂ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಅಸಮಾಂಗ ಗುಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಒಳಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $A \subset B$ ಆದರೆ, $B \subset A$ ಎಂಬುದು ಆಗಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ, ಕಾರಣ, Bಯಲ್ಲಿ Aಗೆ ಸೇರದ ಗಣಾಂಶಗಳಿರಬಹುದು.

$A \subset B$ ಆಗಿದ್ದು Bಯಲ್ಲಿ Aಗೆ ಸೇರದೆ ಇರುವ ಕೆಲವು ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ Aಯನ್ನು Bಯ ಸಹಜ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : Aಯು ನಿಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವೂ ಮತ್ತು Bಯು ನಿಮ್ಮ ನಗರದ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವೂ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ Aಯು Bಯ ಒಂದು ಸಹಜ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಏಕೆ ?

1.7 The Null Set—Consider the set $E = \{a, b, c, d\}$. We can form all the subsets of E, (other than E itself) by removing one or more elements from E.

Thus by removing one element at a time, we obtain the subsets

$$\{a, b, c\}, \quad \{b, c, d\}, \quad \{c, d, a\}, \quad \{d, a, b\}.$$

Similarly subsets obtained by removing 2 elements are :

$$\{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{a, d\}, \ \{b, c\}, \ \{b, d\} \text{ and } \{c, d\}.$$

Subsets obtained by removing 3 elements are :—

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}.$$

Are these all the subsets possible? No. We can obtain one more subset by removing all the 4 elements of E! We thus obtain a set which has no elements! This set is really a very important set. It is called the *empty set* or *null set*, and is usually denoted by the symbol ϕ. It is clear from the way we obtained it that the null set is a subset of every set, or symbolically, for any set E, $\phi \subset E$.

Note :—The student must be careful to distinguish between an element, say a, and the set $\{a\}$ consisting of the single element. He must also be careful in using the signs $\in$ and $\subset$. The sign $\in$ connects an element with a set ; whereas the sign $\subset$ connects two sets.

For example, if

$$E = \{a, b, c, d\}, \text{ then } a \in E \text{ and } \{a\} \subset E.$$

1.7 ಶೂನ್ಯಗಣ

$E = \{a, b, c, d\}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. E ಯಿಂದ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರ ಮೂಲದ Eಯ ಎಲ್ಲ ಉಪಗಣಗಳನ್ನೂ (Eಯ ಹೊರತಾಗಿ) ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಸಲವೂ ಒಂದೊಂದು ಗಣಾಂಶವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಬರುವ ಉಪಗಣಗಳು—

$$\{a, b, c\}, \quad \{b, c, d\}, \quad \{c, d, a\}, \quad \{a, d, b\}$$

ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಬರುವ ಉಪಗಣಗಳು—

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{a, d\}, \quad \{b, c\}, \quad \{b, d\}, \quad \{c, d\}$$

ಮೂರು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಬರುವ ಉಪಗಣಗಳು—

$$\{a\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{d\}$$

ಇಷ್ಟುಮಾತ್ರವೇ ? ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ ? E ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕೂ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಉಪಗಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ಗಣ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಗಣ. ಇದರ ಹೆಸರು ಶೂನ್ಯಗಣ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ϕ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ನಮಗೆ ದೊರೆತ ರೀತಿಯಿಂದಲೇ ಅದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಕ್ಕೂ ಉಪಗಣವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಗಣ E ಗೆ, $\phi \subset E$.

ಸೂಚನೆ :—ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಣಾಂಶ a ಗೂ, a ಮಾತ್ರ ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸಬೇಕು. $\in$ ಮತ್ತು $\subset$ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗಲೂ ಎಚ್ಚರಿಕೆ ವಹಿಸಬೇಕು. $\in$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯು ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ ಗಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಾದರೆ $\subset$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯು ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ—

$E = \{a, b, c, d\}$ ಆದರೆ, $a \in E$ ಮತ್ತು $\{a\} \subset E$

1.8 Operations on Sets, Intersection, Union, Complement–The student is familiar with operations on number. addition, subtraction, multiplication and division. By performing any one of these operations on two numbers we obtain a number.

Similarly we can *perform* certain important operations with sets. We shall define and illustrate the operations of Intersection, Union and Complementation

Intersection

The intersection of two sets A and B is the set o elements which belong to both A and B.

The intersection of A and B is written symbolically a $A \cap B$ which is read as " A intersection B." The defini tion may be neatly written in the form :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

We read the above equation as : " A intersection B is the set of elements x such that x belongs to A and x belongs to B."

Examples :

(i) Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and

$B = \{3, 4, 7, 9\}$.

Then $A \cap B = \{3, 4\}$

(ii) Let $A = \{a, b, c, d\}$ and $B = \{p, q, r, s\}$.

Here A and B have *no elements* in common.

Hence their intersection is the null set.

i.e. $A \cap B = \phi$

Two such sets are said to be *disjoint*.

1·8 ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು— ಛೇದನ, ಸಂಯೋಗ ಮತ್ತು ಪೂರಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು, ಕಳೆಯುವುದು, ಗುಣಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸುವುದು—ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಪರಿಚಯವಾಗಿವೆ. ಈ ಯಾವುದಾದರೂ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪುನಃ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊರೆಯುವುದು.

ಹೀಗೆಯೇ ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಬಹುದು. ಛೇದನ, ಸಂಯೋಗ ಮತ್ತು ಪೂರಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳೆಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಸಹಿತ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಛೇದನ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳ ಛೇದನವು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೂ ಸೇರಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ. A ಮತ್ತು Bಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \cap B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು A ಛೇದನ B ಎಂದು ಓದಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ಮತ್ತು } x \in B\}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು "A ಛೇದನ B ಎಂಬುದು, Aಯ ಗಣಾಂಶವೂ, Bಯ ಗಣಾಂಶವೂ ಆಗಿರುವಂಥ x ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ'' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ,

ಉದಾಹರಣೆಗಳು—

(i) $A = \{1, 3, 4\}$ ಮತ್ತು
$B = \{3, 4, 7, 9\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ
ಆಗ $A \cap B = \{3, 4\}$

(ii) $A = \{a, b, c, d\}$ ಮತ್ತು $B = \{p, q, r, s\}$ ಎಂದಿರಲಿ.
ಇಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಛೇದನವು ಶೂನ್ಯಗಣ.
ಅಥವಾ $A \cap B = \phi$

ಇಂತಹ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

Union

The union of two sets A and B is the set of elements that belong to A or to B (or to both A and B). The union is written symbolically as $A \cup B$, which is read as "A union B". The definition of union may be expressed in the form :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ or } x \in B \}$$

We read the above as : "A union B is the set of elements x such that x belongs to A or x belongs to B".

Example : Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $B = \{3,4,7,9\}$.
Then $A \cup B = \{1,2,3,4,7,9\}$.

To write down $A \cup B$, we may first write all the elements of A and then those elements of B which are not in A. Note that we do not need to repeat the common elements found in both A and B.

Complement. The Universal Set.

In any discussion about sets, we are usually concerned with subsets of a fixed set U. This set U, consisting of *all* the elements under consideration is called the *universal set.* For example if we are considering sets whose elements are natural numbers, then the universal set in this discussion is the set

$$N = \{1,2,3,4,5, \ldots \ldots\}.$$

The *complement* of a set A with respect to the universal set U is the set of all elements of U which are not elements of A. The complement of A is usually denoted by A' and the definition of the complement can be written symbolically :

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ and } x \notin A\}$$

ಸಂಯೋಗ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು Aಗೆ ಅಥವಾ Bಗೆ (ಅಥವಾ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿರುವ) ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ. ಸಂಯೋಗವನ್ನು $A \cup B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು "A ಸಂಯೋಗ B" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಸಂಯೋಗವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ಅಥವಾ } x \in B\}$$

ಇದನ್ನು "A ಸಂಯೋಗ B ಎಂಬುದು Aಗಾಗಲೀ ಅಥವಾ Bಗಾಗಲೀ ಸೇರಿರುವಂತಹ x ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ" ಎಂದೂ ಓದುತ್ತೇವೆ,

ಉದಾಹರಣೆ :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 7, 9\}$ ಆದರೆ,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$

$A \cup B$ ಗಣವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಮೊದಲು Aಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅನಂತರ Aಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ Bಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. A ಮತ್ತು B ಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬರೆಯ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪೂರಕ, ವಿಶ್ವಗಣ

ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿಯತಗಣ U ಎಂಬುದರ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ U ಗಣವನ್ನು ವಿಶ್ವ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ, ಇವುಗಳ ವಿಶ್ವ ಗಣವು

$N = \{1, 2, 3. 4, 5 \ldots\ldots\}$ ಆಗಿರುವುದು.

U ಎಂಬ ವಿಶ್ವಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ A ಗಣದ ಪೂರಕವು Aಯ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲದ Uನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ. ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ Aಯ ಪೂರಕವನ್ನು A' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪೂರಕದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ ಮತ್ತು } x \notin A\}$$

which is read as "A' is the set of elements x such that x belongs to U and x does not belong to A".

Example : Let $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8.9\}$ be the universal set and $A = \{1,3,5,7,9\}$.

Then $A' = \{0,2,4,6,8\}$.

Note that $A \cup A' = U$
and $A \cap A' = \phi$

Are these relations true for any set A and its complement A'?

Exercises 1.2

1 Write down all possible subsets of the following sets :

(i) $\{5,7,9\}$, (ii) $\{a, b\}$, (iii) $\{0\}$, (iv) ϕ

2 If $U = \{0.1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ be the universal set and $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{4,6,7,8,0\}$. $C = \{0,1,2,5,9\}$ find and tabulate the following sets :—

(i) $A \cup B$, (ii) C', (iii) $B \cap C$. (iv) $A \cup C'$, (v) $A' \cap C$, (vi) $(A \cup B)'$, (vii) $(B \cap C)'$, (viii) $B' \cup \phi$, (ix) $C \cap \phi$, (x) $A' \cup B'$, (xi) $B' \cap C'$.

3 Write formulæ of inclusion relative to the following sets :

Q is the set of quadrilaterals in a plane
C is the set of squares.
T is the set of trapezia.
R is the set of rectangles.
P is the set of parallelograms.

ಇದನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ : "A' ಎಂಬುದು Uನ ಗಣಾಂಶವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು Aಯ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲದೆಯೂ ಇರುವಂಥ x ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ"

ಉದಾಹರಣೆ : $U = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $A' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ಆಗಿರುವುದು.

$A \cup A' = U$ ಮತು

$A \cap A' = \phi$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ಗಣ A ಮತ್ತು ಅದರ ಪೂರಕ A' ಇವುಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆಯೇ ?

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\{5, 7, 9\}$, (ii) $\{a, b\}$, (iii) $\{0\}$, (iv) ϕ.

2 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವ ಗಣವೂ ಮತ್ತು $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 6, 7, 8, 0\}$, $C = \{0, 1, 2, 5, 9\}$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಒಂದು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ—

(i) $A \cup B$ (ii) C', (iii) $B \cap C$, (iv) $A \cup C'$,
(v) $A' \cap C$, (vi) $(A \cup B)'$, (vii) $(B \cap C)'$, (viii) $B' \cup \phi$,
(ix) $C \cap \phi$, (x) $A' \cap B'$, (xi) $B' \cap C'$.

3 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಿಗೆ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

Q ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗಣ.
C ಎಂಬುದು ಚಚ್ಚೌಕಗಳ ಗಣ.
T ಎಂಬುದು ತ್ರಾಪಿಜ ಗಳ ಗಣ.
R ಎಂಬುದು ಆಯಗಳ ಗಣ.
P ಎಂಬುದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗಣ.

4 Let T be the set of triangles in a plane, E the set of equilateral triangles, I the set of isosceles triangles, R the set of right angled triangles and B the set of obtuse angled triangles. Write formulæ of inclusion relative to these sets.

Calculate $E \cap R$, $B \cap E$, $T \cap R$, $T \cup E$.

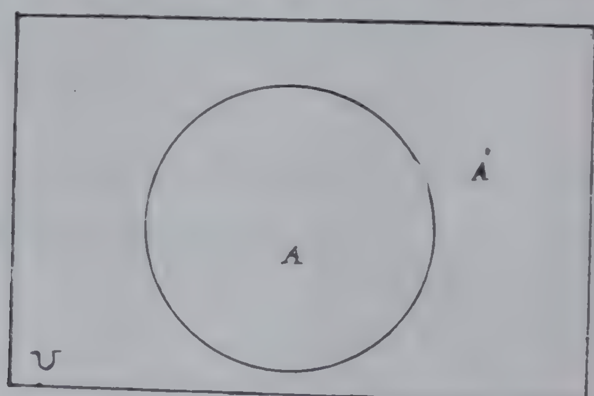
5 If A is any subset of the universal set U, complete the following statements :—

(i) $A \cup U =$ (ii) $A \cap U =$ (iii) $A \cup \phi =$

(iv) $A \cap \phi =$ (v) $A \cup A =$ (vi) $A \cap A =$

(vii) $A \cup A' =$ (viii) $A \cap A' =$

1.9 Venn Diagrams—Relations among subsets may be conveniently represented by diagrams called Venn diagrams after the English logician John Venn (1834—1883). The universal set is usually represented by the region inside a rectangle. Then any subset may be represented by the region within a closed curve drawn inside the rectangle. Figure 1.1 shows the universal set U represented by the region within the rectangle ; a subset A represented by the area within a closed curve ; its complement A' represented by the area within the rectangle but outside the closed curve. Figures 1.2, 1.3 and 1.4 show two subsets A and B in different relationships which can easily be seen in the figures.



$A \cup A' = U$

Fig. 1.1

4 T ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ, E ಎಂಬುದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ, I ಎಂಬುದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ, R ಎಂಬುದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು B ಎಂಬುದು ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಈ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇರುವ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ $E\cap R$, $B\cap E$, $T\cap R$, $T\cup E$

5 A ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವಗಣದ ಒಂದು ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿ.

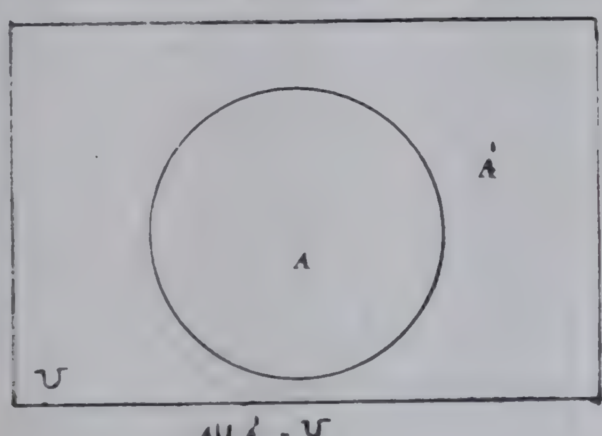
(i) $A \cup U =$ (ii) $A \cap U =$ (iii) $A \cup \phi =$

(iv) $A \cap \phi =$ (v) $A \cup A =$ (vi) $A \cap A =$

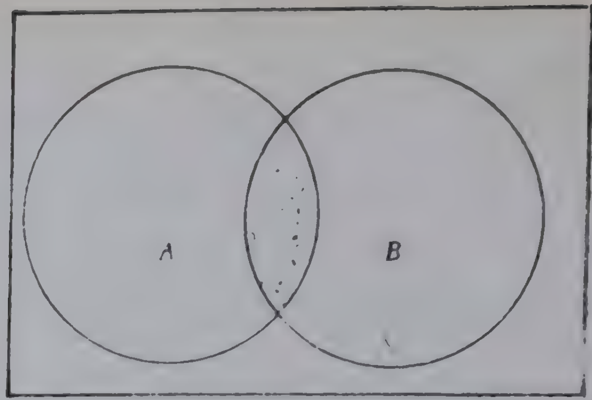
(vii) $A \cup A' =$ (viii) $A \cap A' =$

1.9 ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು

ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಜಾರ್ಜ ವೆನ್ (1834-1883) ಎಂಬುವನ ಹೆಸರನ್ನನುಸರಿಸಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಒಂದು ಆಯದ ಒಳಪ್ರದೇಶದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದು. ಆಗ ಉಪಗಣವನ್ನು ಆಯದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯೊಳಗಿನ ಪ್ರದೇಶದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. 1·1 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಆಯದೊಳಗಿನ ಪ್ರದೇಶದಿಂದಲೂ ಉಪಗಣ Aಯನ್ನು ಮುಚ್ಚಿದ ವಕ್ರರೇಖೆಯೊಳಗಿನ ಪ್ರದೇಶದಿಂದಲೂ ತೋರಿಸಿದೆ. Aಯ ಪೂರಕ A' ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಮುಚ್ಚಿದ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಹೊರಗಿರುವ ಆಯದ ಪ್ರದೇಶವು ತೋರಿಸುವುದು. 1.2, 1.3, ಮತ್ತು 1.4, ಚಿತ್ರಗಳು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಉಪಗಣಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುವು.

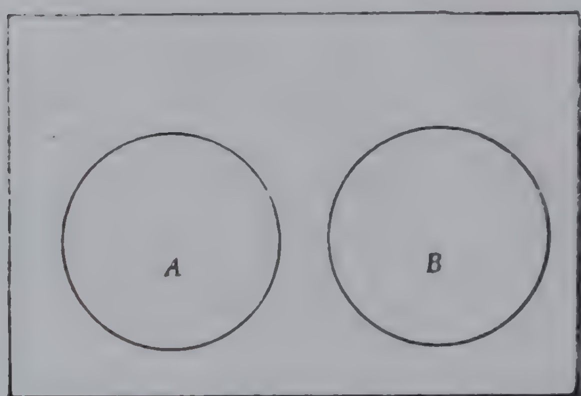


ಚಿತ್ರ 1.1



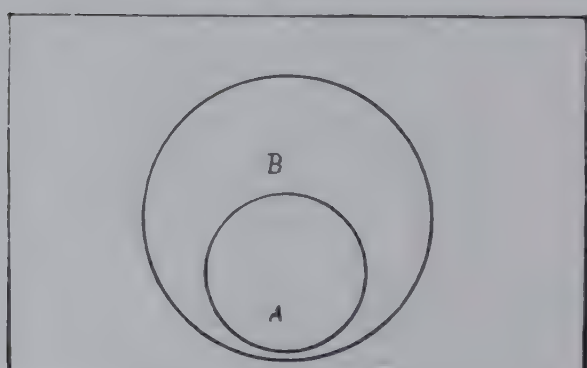
$A \cap B \neq \phi$ shaded portion represents $A \cap B$

Fig. 1.2



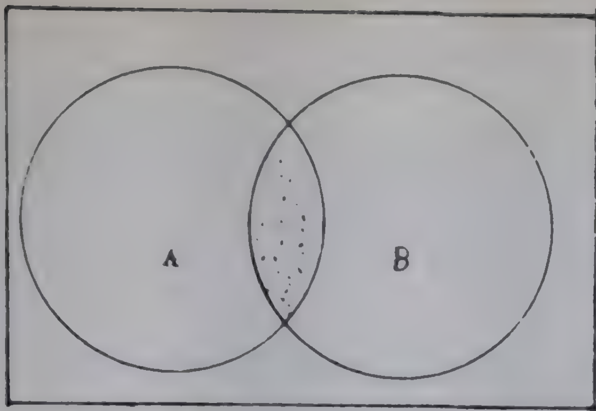
$A \cap B = \phi$

Fig. 1.3



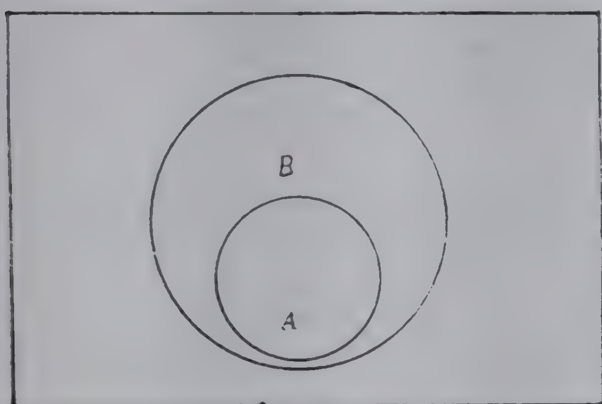
$A \subset B$

Fig. 1.4



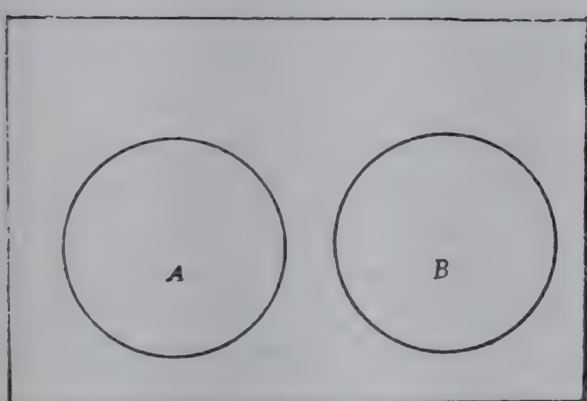
A∩B ≠ φ shaded portion represents A∩B

ಚಿತ್ರ 1.2



A ⊂ B

ಚಿತ್ರ 1.3



A ∩ B = φ

ಚಿತ್ರ 1.4

1.10 Simple Applications

(*a*) *Applications to Logic.* By using Venn diagrams, we can test whether a logical argument is valid. We shall illustrate the method by some simple examples.

Examples : (i) Consider the argument

"All who study mathematics are intelligent.

"Some students of our College study mathematics.

"Therefore some students of our College are intelligent."

The first two sentences are called *premises* and the last is called the *conclusion*. The argument is *valid* if the conclusion must necessarily follow from the premises. To test whether the argument is valid, we represent the statements by sets in a Venn diagram. The sets are drawn so that the premises are satisfied. If we can draw a Venn diagram in which the premises are true but the conclusion is not true, then the corresponding argument is not valid. If it is obvious that we cannot do so, then the argument is valid."

In the above example, let I be the set of intelligent students, M the set of students who study mathematics, and C the set of College students. The first premise implies that $M \subset I$. The second premise implies that $C \cap M \neq \phi$. If we represent the sets C, M and I in a Venn diagram satisfying these conditions, as in Figure 1.5, we see that the portion which represents our College students who study mathematics must necessarily lie in the area representing I. Symbolically we have

1.10 ಸುಲಭ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಗಳು

(a) ತರ್ಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಗಳು.

ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು ತಾರ್ಕಿಕ ವಾದವು ಸಾಧುವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಾದವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

"ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವವರೆಲ್ಲಾ ಬುದ್ಧಿವಂತರು. ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬುದ್ಧಿವಂತರು."

ಮೊದಲ ಎರಡು ವಾಕ್ಯಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷ ವೆಂದೂ, ಕೊನೆಯ ವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ತೀರ್ಮಾನ ಎಂದೂ ಹೆಸರು.

ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷದಿಂದ ತೀರ್ಮಾನವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ರೂಪಿತ ವಾದರೆ, ವಾದವು ಸಾಧುವೆನಿಸುವುದು. ಒಂದು ವಾದವು ಸಾಧುವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು ವೆನ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣಗಳಾಗಿ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪೂರ್ವಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು ಸರಿಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನವು ಸರಿ ಇಲ್ಲದಂತೆಯೂ ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಅವಕ್ಕೆ ತಾಳೆಯಾಗಿರುವ ವಾದವು ಸಾಧುವಲ್ಲ. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದಲ್ಲಿ, ವಾದವು ಸಾಧುವಾಗಿರುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ I ಎಂಬುದು ಬುದ್ಧಿವಂತರಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ M ಎಂಬುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು C ಎಂಬುದು ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷದ ಮೊದಲ ಭಾಗವು $M \subset I$ ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವುದು. ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷದ ಎರಡನೆಯ ಭಾಗವು $C \cap M = \phi$ ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವುದು. ನಾವು C, M ಮತ್ತು N ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಡುವಂತೆ ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, ಚಿತ್ರ 1·5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಭಾಗವು I ಭಾಗದ ಒಳಗಡೆ ಇರಲೇ ಬೇಕು.

$C \cap M) \subset I$, which means that " some college students are intelligent". Hence the conclusion is valid

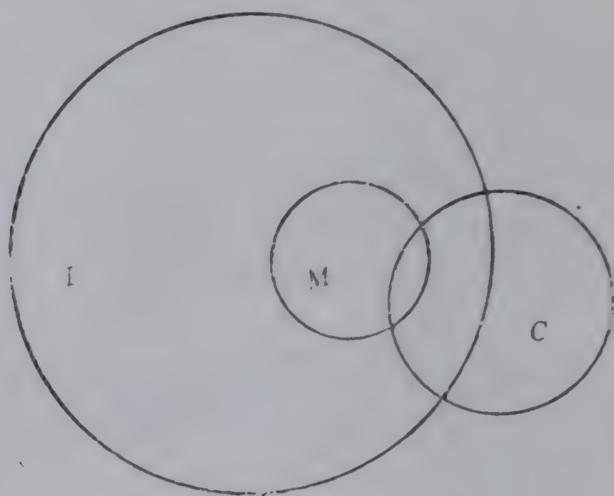


Fig. 1.5

Note :—A logical argument can be valid without the statements being true in the usual sense. In the above example we may doubt whether the first statement is true! However we are only concerned here as to whether the conclusion necessarily follows from the premises.

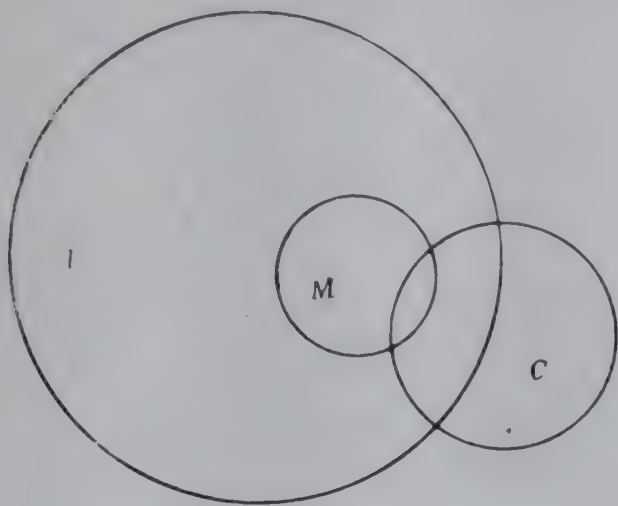
(ii) "All who study mathematics are intelligent.

All our College students are intelligent.

Therefore some of our College students study mathematics."

Using the same notation as in (i). we see that the first premise implies $M \subset I$. The second premise implies $C \subset I$. The Venn diagram Fig. 1.6 shows sets C, M, and I satisfying these conditions but such that $C \cap M = \phi$, which means that in this case " no

ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $(C \cap M) \subset I$, ಇದರ ಅರ್ಥ "ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಬುದ್ಧಿವಂತರು'' ಆದ್ದರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನವು ಸಾಧುವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.5

ಸೂಚನೆ : ಉಕ್ತಿಗಳು ನಮ್ಮ ಬಳಕೆಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಒಂದು ತಾರ್ಕಿಕ ವಾದವು ಸಾಧುವಾಗಿರಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಉಕ್ತಿಯು ಸರಿಯೇ ಎಂಬ ಶಂಕೆ ನಮಗೆ ಬರಬಹುದು. ಆದರೆ, ಪೂರ್ವ ಪಕ್ಷದಿಂದ ತೀರ್ಮಾನವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ರೂಪಿತವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದಷ್ಟೆ ಇಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶ.

(ii) " ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವವರೆಲ್ಲಾ ಬುದ್ಧಿವಂತರು.
ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಬುದ್ಧಿವಂತರು,
ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತಾರೆ.''

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲಿನ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು $M \subset I$ ಎಂದೂ ಎರಡನೆಯ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷವು $C \subset I$ ಎಂದೂ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವುವು. 1·6 ವೆನ್ ಚಿತ್ರವು C, M ಮತ್ತು N ಗಳು ಈ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೊಳಪಟ್ಟು $C \cap M = \phi$ ಇರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು.

College student takes mathematics". This contradicts the conclusion and the argument is not valid.

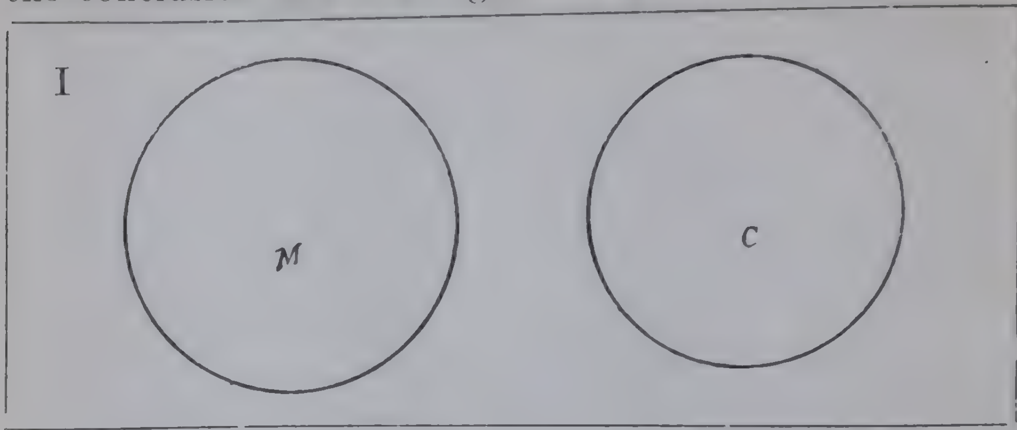


Fig. 1·6

(*b*) *Analysis of Composite Data.* Venn diagrams help us to analyse certain types of data.

Examples :

(*i*) *In a class of* 120 *students, each is required to take at least one of the two subjects, chemistry and biology. If* 65 *take chemistry and* 22 *take both chemistry and biology how many take biology* ?

In the figure 1.7, the area marked *C* represents students who take chemistry. and the area marked *B*

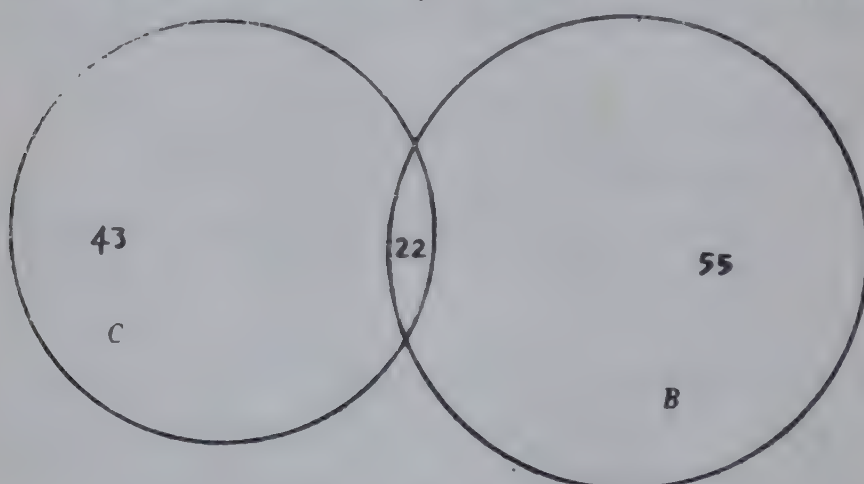
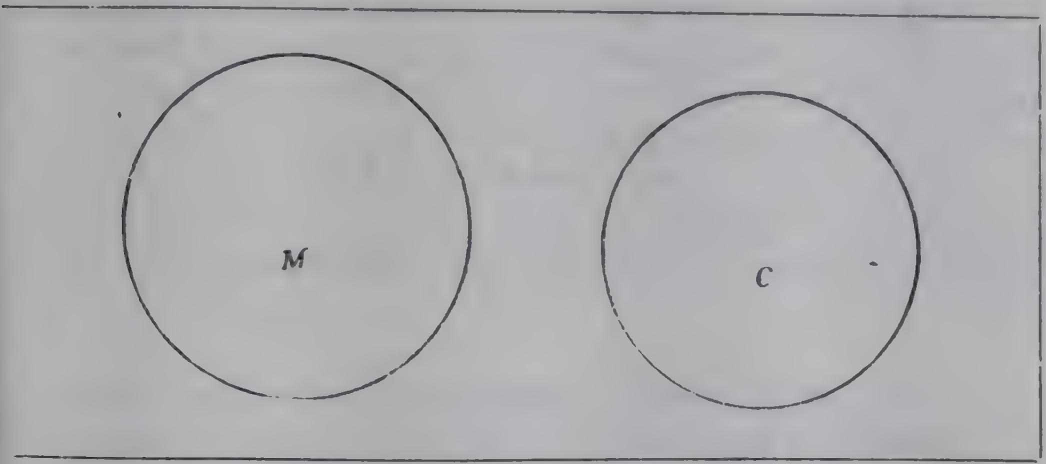


Fig. 1.7

ಇದರ ಅರ್ಥ_‘‘ಕಾಲೇಜಿನ ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.’’ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುವುದರಿಂದ ವಾದವು ಸಾಧುವಾಗಿಲ್ಲ.

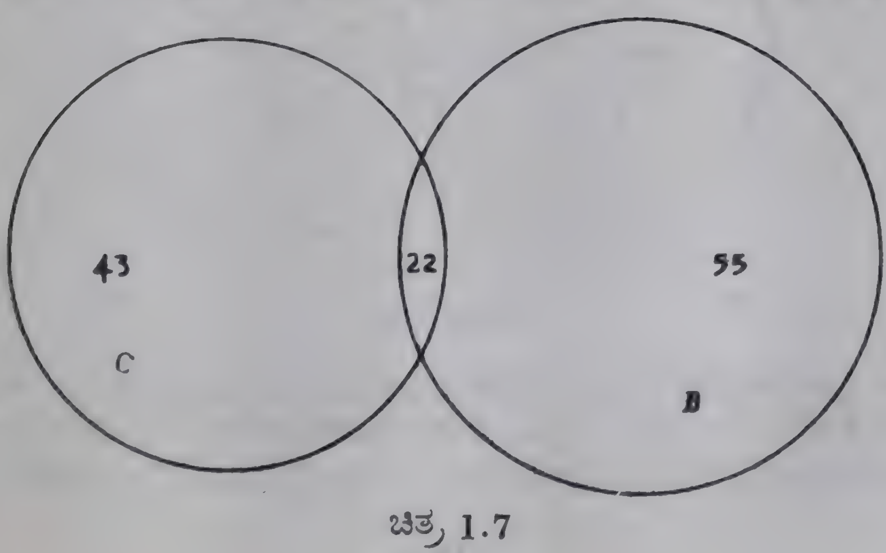


ಚಿತ್ರ 1.6

(*b*) ಮಿಶ್ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವಿಭಜನೆ: ಕೆಲವು ರೀತಿಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿಭಜನೆ ಮಾಡಲು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (i) 120 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರ ಇವುಗಳೆರಡರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. 65 ಜನರು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ 22 ಜನರು ರಸಾಯನ ಮತ್ತು ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರೆಷ್ಟು ಮಂದಿ?

ಚಿತ್ರ 1.7ರಲ್ಲಿ C ಗುರುತು ಮಾಡಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು B ಗುರುತು ಮಾಡಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಜೀವ



ಚಿತ್ರ 1.7

represents students who take biology. The common area will represent students who take both chemistry and biology. Inserting the figures given in the corresponding regions, we have 22 in the common region and 43 in the remaining part of C. Since the total area must represent 120 students we must have 55 in the part of B outside the common region, since $43 + 22 + 55 = 120$. We easily see from the figure that 43 take only chemistry, 55 take only biology and 22 take both chemistry and biology. Hence the number that take biology is $55+22 =77$.

(ii) *In a medical examination of* 150 *students it was found that* 90 *had eye trouble,* 50 *had heart trouble and* 30 *had both complaints. What percentage of the students had either eye trouble or heart trouble*?

In figure 1.8, the region within the rectangle represents 150 students, the area marked E represents those

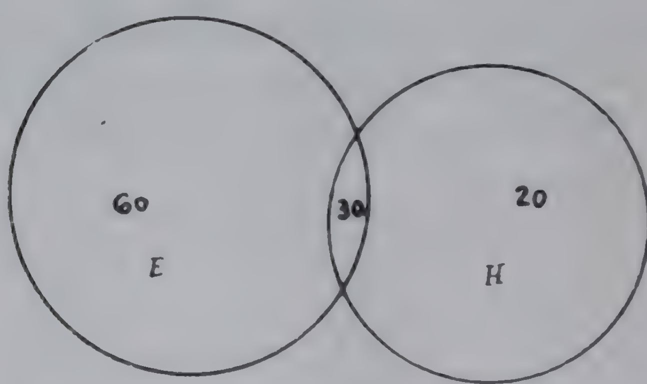


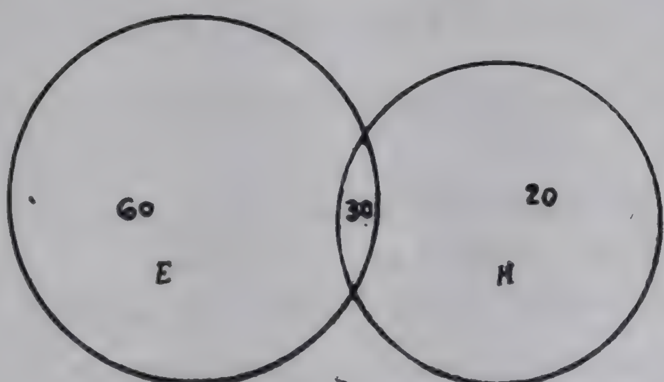
Fig. 1·8

with eye trouble and that marked H represents those with heart trouble. We first insert the number 30 in the area common to H and E, since we are given that 30

ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು. ಇವೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಸೇರಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಈ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಕ್ಕ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ, 22 ಜನರು ಎರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು 43 ಜನರು ಮಿಕ್ಕಿರುವ Cಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 120 ಇರಬೇಕಾದುದರಿಂದ, ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಗದ ಹೊರಗಡೆ B ಗೆ ಸೇರಿದ 55 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇರಬೇಕು. ಈ ಚಿತ್ರದಿಂದ 43 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ, 55 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಮತ್ತು 22 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ ರೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಜೀವ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆ $55+22=77$.

(ii) 150 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ವೈದ್ಯಕೀಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 90 ಜನಕ್ಕೆ ಕಣ್ಣಿನ ವೇದನೆಯೂ 50 ಜನಕ್ಕೆ ಹೃದಯದ ವೇದನೆಯೂ ಮತ್ತು 30 ಜನಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ತೊಂದರೆಗಳೂ ಇದ್ದುವು. ಶೇಕಡಾ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕಣ್ಣಿನ ಅಥವಾ ಹೃದಯದ ವೇದನೆ ಇತ್ತು?

ಚಿತ್ರ 1.8ರಲ್ಲಿ ಆಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರದೇಶವು 150 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನೂ, E ಗುರುತಿಸಿರುವ ಭಾಗವು ಕಣ್ಣಿನ ವೇದನೆ ಇರುವವರನ್ನೂ H ಗುರುತಿಸಿರುವ ಭಾಗವು



ಚಿತ್ರ 1.8

ಹೃದಯದ ವೇದನೆ ಇರುವವರನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು. 30 ಜನರಿಗೆ ಎರಡೂ ತೊಂದರೆಗಳಿವೆಯೆಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲು H ಮತ್ತು E ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿರುವ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 30 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಉಳಿದಿರುವ

have both complaints. The remaining portion of E must then correspond to 60 and the remaining portion of H to 20. Inserting these numbers in the corresponding regions, we see that the number having either eye trouble or heart trouble is $60 + 30 + 20 = 110$.

$$\therefore \text{ Required percentage} = \frac{100 \times 110}{150} = 73\tfrac{1}{3}$$

Exercises 1.3

1 Show by using Venn diagrams that

(a) $A \cap B = B \cap A$, (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(c) $A \cup B = B \cup A$, (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (f) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
(g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A\ U\ C)$.

2 Show by using Venn diagrams that

(a) $A \cup B = A$ if and only if $B \subset A$,
(b) $A \cap B = B$ if and only if $B \subset A$, (c) $(A')' = A$.

3 Use Venn diagrams to test whether the following arguments are valid :—

(a) All musicians are artistes.
Some Indians are musicians.
Therefore some Indians are artistes.

(b) Students are either intelligent or dull.
Students are either boys or girls.
Therefore some dull students are girls.

(c) All flowers are pretty.
Some girls are pretty.
Therefore some girls are flowers.

Eಯ ಭಾಗವು 60ನ್ನೂ ಮತ್ತೂ ಉಳಿದಿರುವ Hನ ಭಾಗವು 20ನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಆಯಾ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದರಿಂದ ಕಣ್ಣಿನ ಅಥವಾ ಹೃದಯದ ಬೇನೆ ಇರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು $60+30+20=110$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

$$\therefore \text{ಬೇಕಾದ ಶೇಕಡಾ ಸಂಖ್ಯೆ} = 100 \times \frac{110}{150} = 73\tfrac{1}{3}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1 ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ —

(a) $A \cap B = B \cap A$, (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(c) $A \cup B = B \cup A$, (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (f) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,
(g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$,
(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2 ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ:

(a) $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $A \cup B = A$
(b) $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, $A \cap B = B$
(c) $(A')' = A$

3 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ವಾದಗಳು ಸಾಧುವಾಗಿವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

(a) ಸಂಗೀತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೆಲ್ಲರೂ ಕಲಾವಿದರು,
ಕೆಲವು ಭಾರತೀಯರು ಸಂಗೀತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಭಾರತೀಯರು ಕಲಾವಿದರು.

(b) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬುದ್ಧಿವಂತರು ಅಥವಾ ದಡ್ಡರು.
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಡುಗರು ಅಥವಾ ಹುಡುಗಿಯರು.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ದಡ್ಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಡುಗಿಯರು.

(c) ಹೂಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಂದವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
ಕೆಲವು ಹುಡುಗಿಯರು ಅಂದವಾಗಿರುತ್ತಾರೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಹುಡುಗಿಯರು ಹೂಗಳು.

4 Given the following premises state the main conclusion in each case :—

(*a*) No intelligent people are bad-tempered.
Some intelligent people have dark eyes.
Therefore . . . .

(*b*) Some old things are valuable.
Valuable things are beautiful.
Therefore . . . .

5 Use Venn diagrams to solve the following problems :—

(*a*) Out of 800 students in a College, 200 take Physics, 300 take Chemistry and 50 take both Physics and Chemistry. Find the number that take neither Physics nor Chemistry.

(*b*) In a group of 250 College students, 77 take English, 109 take Economics, 75 take Sociology, 26 take English as well as Economics, 24 take English as well as Sociology, 30 take Economics as well as Sociology, and 11 take all three subjects. How many of the 250 students are not taking any of these subjects?

Hint—Draw a Venn diagram with 3 circles representing the 3 subjects. Insert the number 11 in the area common to the three circles and fill in the adjoining areas with appropriate numbers corresponding to the given data.

4 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಪ್ರತಿಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಮುಖ್ಯ ತೀರ್ಮಾನವೇನೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(a) ಬುದ್ಧಿವಂತರಾರಿಗೂ ಮುಂಗೋಪವಿರುವುದಿಲ್ಲ.
ಕೆಲವು ಬುದ್ಧಿವಂತರಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಕಣ್ಣುಗಳಿವೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ . . . . . ,

(b) ಕೆಲವು ಹಳೆಯ ವಸ್ತುಗಳು ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವುಳ್ಳವುಗಳು
ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವುಳ್ಳ ವಸ್ತುಗಳು ಸುಂದರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ . . . . . .

5 ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

(a) ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ 800 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 200 ಜನರು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ 300 ಜನರು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ ಮತ್ತು 50 ಜನರು ಭೌತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಅಥವಾ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಎರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೆ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.**

(b) 250 ಜನ ಕಾಲೇಜು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 77 ಜನ ಇಂಗ್ಲಿಷನ್ನೂ, 109 ಜನ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ, 75 ಜನ ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ, 26 ಜನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ, 24 ಜನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ 30 ಜನ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ, ಮತ್ತು 11 ಜನ ಈ ಮೂರೂ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. ಒಟ್ಟು 250 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ಈ ವಿಷಯಗಳಾವುದನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ?

ಸೂಚನೆ : ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ, ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿರುವ ವೆನ್ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸೇರಿರುವ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ 11 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದು, ಪಕ್ಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ತಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

CHAPTER 2

Number Systems

2·1 Natural Numbers—The development of mathematics began with counting and with a number system for doing this counting. The mathematical needs of the primitive man were very few. He only wanted a way of counting the few articles that he possessed. He would have certainly used the fingers of his hand and called the numbers one, two, three, etc., by some terms in his own language. As he began to acquire more articles, he must have perhaps used pebbles or stones or other things to show repetitions of fives or tens. As civilization developed, different countries introduced their own systems of counting. The system used by the Romans, indicated by I, II, III, IV, etc., is one such, but it was not suited for arithmetical calculations. In due course, the system invented in India, and called the Hindu numeral system began to be employed universally. The characteristic feature of this system is the use of nine digits, together with a symbol called zero, to denote any number whatever, by means of a place-value system of numeration.

Thus arose the natural numbers. Leopald Kronecker declared. " God made the whole numbers; man made the rest."

Indeed, these are the very numbers with which the child begins his study of arithmetic; they form the natural basis for further developments in mathematics. These numbers are called *natural numbers* or *counting*

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯೂಹಗಳು

2·1 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎಣಿಕೆ, ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ—ಇವುಗಳಿಂದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯು ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಆದಿಮಾನವನಿಗೆ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧವಾದ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳು ತೀರಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದುವು. ಅವನಿಗೆ ತನ್ನಲ್ಲಿದ್ದ ಕೇವಲ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವುದು ಮಾತ್ರ ಅಗತ್ಯವಿತ್ತು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನು ತನ್ನ ಬೆರಳು ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು. . . . ಎಂಬುದಾಗಿ ತನ್ನ ಸ್ವಂತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುವೋ ಪದಗಳಿಂದ ಕರೆದಿರಬೇಕು. ತನ್ನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವಸ್ತುಗಳು ಸೇರುತ್ತಾ ಬರಲಾಗಿ ಐದು ಅಥವಾ ಹತ್ತರ ಆವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಅವನು ಹರಳುಗಳನ್ನೋ, ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನೋ ಅಥವಾ ಇತರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೋ ಬಹುಶಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. ನಾಗರಿಕತೆಯು ಬೆಳೆದಂತೆಲ್ಲಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಎಣಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದುವು. ರೋಮನರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ *I, II, III, IV* ಇತ್ಯಾದಿ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ಕ್ರಮವು ಇಂತಹುದೊಂದು: ಆದರೆ ಅಂಕಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಇದು ಅಷ್ಟು ಸರಿ ಹೊಂದಲಿಲ್ಲ. ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿತವಾದ, ಹಿಂದೂ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹವೆಂಬ ಪದ್ಧತಿಯು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾದರೂ ಒಂಬತ್ತು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯವೆಂಬೊಂದು ಚಿಹ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಯೋಜಿಸಿ. ಸ್ಥಾನದ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಅಂಕಕರಣ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿರುವುದೇ ಈ ಕ್ರಮದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉದ್ಭವಿಸಿದುವು. ಲಿಯೋಪಾಲ್ಡ್ ಕ್ರೊನೇಕರ್ ಎಂಬಾತನು, ''ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ದೈವಕೃತ; ಬೇರೆಲ್ಲವೂ ಮಾನವ ಕೃತ'' ವೆಂದು ಸಾರಿಹೇಳಿದ್ದಾನೆ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ, ಮಕ್ಕಳು ಅಂಕಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಮೊದಲು ಮಾಡುವುದಾದರೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೇ: ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆಲ್ಲಾ ಇವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ಮೂಲಾಧಾರವಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ

numbers. The set of all natural numbers is denoted by N, and consists of the numbers

1, 2, 3, 4, 5, ...

Addition in the set of natural numbers—Addition is an operation by means of which we can combine any two natural numbers a and b to form a natural number denoted by the symbol $(a+b)$, and called the sum of a and b.

Thus the sum of any two natural numbers is a natural number.

e.g. $7+11=18$ snd $4+47=51$

Here 18 and 51 are natural numbers.

We describe this property of addition by saying that "the set N is closed under the operation of addition."

2.2 Zero and negative integers—On the other hand during the process of subtraction. we do not always get a natural number as the result of subtracting one number from another.

e.g.(1) $4-4 \neq$ (not equal to) a natural number.

$\therefore$ if we want to subtract a natural number from itself, we have to introduce a new number, namely, zero, denoted by the symbol 0. In fact, this is a very valuable contribution of India to the world of mathematics. We know that 0 has the property

$$x+0=x, \text{ for all } x \in I$$

e.g. (2) Again, consider $5-8$. This difference is not a natural number. We have to formulate the concept of negative numbers, in order to be able to subtract 8 from 5. We say that $5-8=-3$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಸಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು N ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತೇವೆ ; ಇದು

1, 2, 3, 4, 5, ...

ಮುಂತಾದ ಸಂಖೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ

a, b ಗಳೆಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವ $(a+b)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮವೇ ಸಂಕಲನ.

ಆದಕಾರಣ, ಎರಡು ಸಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : $7+11=18$ ಮತ್ತು $4+47=51$

ಇಲ್ಲಿ 18 ಮತ್ತು 51 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಕಲನದ ಈ ಒಂದು ಗುಣವನ್ನು "N ಎಂಬ ಗಣವು ಸಂಕಲನದ ಪರಿಕರ್ಮದಲ್ಲಿ ಆವೃತಗೊಂಡಿದೆ" ಎಂದು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

2·2 ಶೂನ್ಯ, ಮತ್ತು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, ವ್ಯವಕಲನ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ, ಪ್ರತಿಸಾರಿಯೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಫಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. (1) : $4-4$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಕಳೆಯಬೇಕಾದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವೆಂಬ, 0 ಸಂಜ್ಞೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ತಂದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಇದು ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ಭಾರತವು ನೀಡಿದ ಅತಿ ಅಮೂಲ್ಯವಾದ ಕಾಣಿಕೆಯಾಗಿದೆ.

$x \in I$ ಆಗುವ ಎಲ್ಲಾ x ಗಳಿಗೂ, $x+0=x$ ಎಂದಾಗುವ ಗುಣವನ್ನು ಈ 0 ಯು ಹೊಂದಿದೆ.

ಉದಾ. (2) : ಈಗ 5—8 ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. 5 ರಿಂದ 8 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕಾದರೆ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$5-8=-3$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

In fact, corresponding to each natural number, we can form the respective negative number. Thus $-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots\ldots\ldots$ are the negative numbers corresponding to the natural numbers $\{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$. We call the numbers $-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots\ldots\ldots$ negative integers and $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$ positive integers.

The set consisting of all negative integers, zero, and all positive integers is called the set of integers.

$\therefore\ I = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

In fact, in the set of integers, an equation of the form $x+a=0$, where $a \in I$, can always be solved.

Further, it is clear that the sum and difference of any two integers is an integer. $\therefore I$ is closed under addition and subtraction.

2.3 Multiplication in the set of integers—Multiplication may be regarded as repeated addition :

e.g. $7 \times 4 = 7+7+7+7 = 28$

$(-8) \times 3 = (-8)+(-8)+(-8) = 24$

It may be recalled that we use the convention of signs

$$(+m) \times (+n) = +mn$$
$$(-m) \times (+n) = -mn = (+m) \times (-n)$$
$$(-m) \times (-n) = +mn$$

where m and n are any two positive integers. We remember that :

$$0 + x = 0 = x + 0 \text{ for all } x \in I$$

It is thus seen that the product of any two integers is an integer ; in other words, the set I is closed under multiplication.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಒಂದೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಒಂದೊಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, $-1, -2, -3, -4 \ldots$ ಎಂಬ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಅನುಗುಣವಾಗಿವೆ. $-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದೂ, $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ ಗಳನ್ನು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \ldots\ldots\}$$

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, a ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $x+a=0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾದರೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಮತ್ತೆ, ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವೂ, ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

2.3 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರ

ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದ ಸಂಕಲನವನ್ನೇ ಗುಣಾಕಾರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ. : $7 \times 4 = 7+7+7+7 = 28$

$(-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8) = -24$

m, n ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,

$$(+m) \times (+n) = +mn$$

$$(-m) \times (+n) = -mn = (+m) \times (-n)$$

$$(-m) \times (-n) = +mn$$

ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಇಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. $x \in I$ ಆಗುವ x ಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ, $0 \times x = 0 = x \times 0$ ಎಂದು ನೆನೆಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದರಿಂದ, ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಬೇರೆ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಗುಣಾಕಾರದ ಬಗ್ಗೆ, I ಎಂಬ ಗಣವು ಆವೃತವಾಗಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು.

2.4 Division in the set of integers—Division of an integer a by an integer $b(\neq o)$, does not always give an integer.

$$e.g. \text{ while } \frac{28}{7} = 4, \ \frac{25}{6} \neq \text{ an integer}$$

Thus, division will not always be possible in the set of integers only. In fact, this operation generates fractions in a natural way. With their introduction into the present number system, division becomes possible in all cases, where the divisor $\neq 0$.

Now our number system consists of all integers and all fractions. This new system is called the set of *Rational Numbers*, and will be denoted by the symbol Q.

If $x \in Q$, it can always be expressed in the form of a ratio $\frac{p}{q}$, where p and q are integers, and $q \neq o$. This is the reason why Q is called the set of *rational* numbers. In fact this property is taken as the definition of a rational number.

Definition : A rational number is one which can be expressed in the form $\frac{p}{q}$ *where* p *and* q *are integers,* $q \neq 0$.

$$e.g. \ -4 = \frac{-4}{1}, \ 3 = \frac{3}{1}, \ 4\tfrac{1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$0 = \frac{0}{a} \text{ where } a \neq o, \ a \in I., \text{ etc.}$$

Note—This representation is not unique ;

$$\text{for we may write } 3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{24}{8} \text{ etc.}$$

2.4 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರ

a ಎಂಬೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $b(\neq 0)$ ಎಂಬೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಲಭಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. : $\frac{28}{7} = 4$ ಆದರೂ $\frac{25}{6}$ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ

ಹೀಗಾಗಿ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಭಾಗಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಈ ಪರಿಕರ್ಮವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹದೊಳಕ್ಕೆ ಇವು ಪ್ರವೇಶಿಸಿದೊಡನೆಯೇ, ಭಾಜಕವು 0 ಅಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಭಾಗಾಕಾರವು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹವು ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ಹೊಸ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಇದನ್ನು Q ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x \in Q$ ಆದರೆ, xನ್ನು p, qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿಯೂ, $q \neq o$ ಇರುವಂತೆ

$x = \frac{p}{q}$ ಎಂಬುದಾಗಿ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧದರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿಯೇ Qವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯೂಹವೆನ್ನುವುದು. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೇ ಈ ಗುಣವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: p, qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿಯೂ, $q \neq 0$ ಆಗಿದ್ದು, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $-4 = \frac{-4}{1}$; $3 = \frac{3}{1}$; $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$0 = \frac{0}{a}$ $(a \neq 0)$, $a \in I$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಗಮನಿಸಿ: ಈ ರೀತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯು ಏಕೈಕವಲ್ಲ ;

ಏಕೆಂದರೆ, $3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{24}{8}$ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

Notice that Q is closed under the fundamental operations : addition, subtraction, multiplication and division. In fact, we can always solve an equation of the form $ax+b=o$, where $a, b \in Q, a \neq o$, getting the solution $x = -\dfrac{b}{a} \in Q$.

2.5 Irrational numbers—Next let us consider the solution of quadratic equations. An equation such as $x^2-5x+6=0$ or $(x-2)(x-3)=0$ has solutions $x=2$ and $x=3$ which are rational numbers.

However, if we take the equation $x^2=2$, its solutions are given by $x= \pm \sqrt{2}$.

But it can be easily proved that $\sqrt{2}$ is not rational.

Proof : Suppose that $\sqrt{2}$ is rational. Then it can be expressed in the form $\dfrac{p}{q}$ where p and q are integers, and $q \neq 0$. We may further suppose that p and q have no common factors except ± 1.

$$\text{Now } \frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Squaring on both sides, $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$ or $p^2 = 2q^2$.

$\therefore$ p^2 is an even number, $\therefore$ p is an even number

Let $p=2m$ $\quad \therefore \quad (2m)^2=4m^2=2q^2$

$\therefore \quad q^2=2m^2$

$\therefore \quad q^2$ is even, $\quad \therefore$ q is even.

Thus both p and q are even. $\therefore$ p and q have 2 as a common factor, which is contrary to the assumption that p and q have no common factor except ± 1

ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳೆಂಬ ಮೂಲ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಲ್ಲಿ Q ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ $a, b \in Q$ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ; $ax+b=0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಸಾರಿಯೂ $x \in Q$ ಇರುವಂತಹ ಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $x = -\frac{b}{a} \in Q$.

2.5 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಇನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x^2-5x+6=0$ ಅಥವಾ $(x-2)(x-3)=0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $x=2$, $x=3$ ಎಂಬ ಮೂಲಗಳೇನೋ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, $x^2=2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅದರ ಮೂಲಗಳು $x = \pm\sqrt{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :— $\sqrt{2}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ, ಅದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ಎಂದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ; ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$. $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದೂ ಸಹ ಭಾವಿಸಬಹುದು ; ಎಂದರೆ, p ಮತ್ತು qಗಳಿಗೆ ± 1 ವಿನಾ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಇಲ್ಲ.

ಈಗ $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ ವರ್ಗಿಸಿದರೆ,

$\frac{p^2}{q^2} = 2$ ಅಥವಾ $p^2 = 2q^2$

$\therefore p^2$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. $p=2m$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore (2m)^2 = 4m^2 = 2q^2$.

$\therefore q^2 = 2m^2$ $\therefore q^2$ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ $\therefore q$ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗೆ, p ಮತ್ತು qಗಳೆರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ, ಎಂದ ಮೇಲೆ p, qಗಳಿಗೆ

$\therefore$ Our assumption that $\sqrt{2}$ is rational must be false. $\therefore$ $\sqrt{2}$ is not rational.

Thus we find that there are numbers which are not rational ; we call them *irrational* numbers.

Examples of other irrational numbers are

$$\sqrt[3]{} \quad \sqrt{6},\ 2+\sqrt{3},\ \text{etc.}$$

The number π, representing the ratio of the length of the circumference of any circle to its diameter, is also irrational.

2.6 **Real Numbers**--The set of all rational and irrational numbers form the set of REAL numbers, and this set is denoted by R.

Decimal Representation—(*a*) We shall first consider decimal representation of rational numbers. Given any rational number $\frac{p}{q}$ $(q \neq o)$, by division of p by q. it is possible to develop $\frac{p}{q}$ into a decimal.

$$e.g.\ \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots\ldots$$

$$\frac{5}{11} = 0.454545\ldots\ldots\ldots$$

2 ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಯಿತು. ಆದರೆ, ಇದು p, q ಗಳಿಗೆ ± 1 ವಿನಾ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬ ಪೂರ್ವಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ.

$\therefore \sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಭಾವನೆ ತಪ್ಪಾಗಿರಬೇಕು. $\therefore \sqrt{2}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

ಇದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$\sqrt[3]{5}, \sqrt{6}, 2+\sqrt{3}$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಗೂ ಅದರ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ π ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.

2.6 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು R ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ದಶಮಾಂಶ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಣೆ

(*a*) ಮೊದಲು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. $\frac{p}{q}$, $(q \neq 0)$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ p ಯನ್ನು q ನಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ, ಇದನ್ನು ಒಂದು ದಶಮಾಂಶದಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾ: $\frac{3}{2} = 1.5$

$\frac{3}{4} = 0.75$

$\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots\ldots$

$\frac{1}{6} = 0.1666 \ldots\ldots$

$\frac{5}{11} = 0.454545 \ldots\ldots$

From these examples, we find that rational numbers can be expressed in the form of either a terminating or a recurring decimal.

We may next point out that any terminating or periodic decimal can be converted into the form of a ratio $\frac{p}{q}$ where $p, q \in I, q \neq 0$.

Example—(1) Consider 72.052

Now $72.052 = 72 + \frac{052}{1000} = 72 + \frac{52}{1000} = \frac{72052}{1000}$ which is in the form $\frac{p}{q}$.

(2) Consider $x = 82.4267676767 \ldots\ldots$

$$10000\,x = 824267.676767 \ldots\ldots$$

$$100\,x = 8242.676767 \ldots\ldots$$

Subtracting $9900\,x = 816025.000000 \ldots\ldots$

$\therefore\ x = \frac{816025}{9900}$ which is in the form $\frac{p}{q}$

We may further note that any terminating decimal can be expressed as a periodic decimal.

e.g Let $x = 8.4$

Now if $y = 8.39999 \ldots\ldots$

$10y = 83.9999 \ldots\ldots$

$y = 8.3999 \ldots\ldots$

Subtracting we get, $9y = 75.6$

$\therefore\ y = 8.4 = x$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಅಥವಾ ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಅಥವಾ ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶವಾವುದನ್ನೇ ಆಗಲಿ, $p,q \in I$ $q \neq 0$ ಇರುವಂತೆ, $\frac{p}{q}$ ಎಂದು ಒಂದು ಪ್ರಮಾಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: (1) 72.052ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ, $72.052 = 72 + \frac{052}{1000} = 72 + \frac{52}{1000} = \frac{72052}{1000}$

ಇದು $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

(2) $x = 82.4267676767\ .\ .\ .$ ನ್ನು ತೆಗದುಕೊಳ್ಳಿ.

$$10000x = 824267.676767\ .\ .\ .\ .\ .$$

ಕಳೆದರೆ, $$100x = 8242.676767\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$9900x = 816025.000000$$

$\therefore x = \frac{816025}{9900}$, ಇದು $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದೊಂದು ದಶಮಾಂಶವನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಒಂದು ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾ : $x = 8.4$ ಎಂದಿರಲಿ

$y = 8.399999\ .\ .\ .\ .$ ಎನ್ನೋಣ.

$$\therefore 10y = 83.9999\ .\ .\ .\ .$$

$$y = 8.3999\ .\ .\ .\ .$$

ಕಳೆಯಲಾಗಿ, $9y = 75.6$

$$\therefore y = 8.4 = x$$

Similarly, we may write :

$$7.5 = 7.499999\ldots\ldots\ldots$$

$$8.01 = 8.009999\ldots\ldots\ldots$$

Thus all terminating decimals can be easily expressed as periodic decimals.

Therefore, any rational number can be expressed as a periodic decimal.

(*b*) It is found that irrational numbers yield non-periodic infinite decimals, when they are expressed as decimals.

e.g. $\sqrt{2} = 1.4142136\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{3} = 1.73205080\ldots\ldots\ldots$

$\pi = 3.14159265358\ldots\ldots\ldots$

Each of these is a non-periodic infinite decimal.

Thus we find that any real number can be expressed by means of a decimal; those real numbers whose decimal expressions are periodic (or terminating) are rational numbers, and those which are given by non-periodic infinite decimals are irrational numbers.

Exercises 2.1

(1) Express the following rational numbers in the decimal form :

$$\frac{4}{25}, \frac{3}{40}, \frac{1}{16}, \frac{1}{80}, \frac{4}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{13}, \frac{5}{17}.$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ,

$$7.5 = 7.49999 \ldots\ldots$$

$$8{\cdot}01 = 8{\cdot}0099999 \ldots\ldots$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, ಪ್ರರ್ಯಾಪ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ, ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಆಗಲಿ, ಒಂದು ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(*b*) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ನಿರೂಪಣೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಆವರ್ತಿಸದ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾ :

$$\sqrt{2} = 1.4142136\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.73205080\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi = 3.14159265358\ldots\ldots\ldots$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದೂ ಆವರ್ತಿಸದ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ, ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ದಶಮಾಂಶಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ ; ಯಾವ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳಿಂದ (ಅಥವಾ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳಿಂದ) ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೋ ಅವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಯಾವುವನ್ನು ಆವರ್ತಿಸದ, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳಿಂದಲೇ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೋ, ಅವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1 ಮುಂದಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{4}{25}, \frac{3}{40}, \frac{1}{16}, \frac{1}{80}, \frac{3}{11}, \frac{3}{13}, \frac{5}{17}.$$

2 Express the following decimals in the form

$\frac{p}{q}$, $p, q \in I$, $(q \neq o)$.

(i) 72.05 (ii) 0.0014 (iii) 11.5003

(iv) 5.0667667667....................

(v) 13.461461461....................

(vi) 11.7032260322603226........

3 Prove that $\sqrt{3}$ is irrational.

2.7. The Number Line.—There is a convenient way of representing numbers by means of points on a straight line. A line l is drawn, which is extended indefinitely on both sides. (Fig. 2·1)



Fig. 2.1

A point O is taken on l. This divides the line into two half lines : OX lying to the right side of O, and OX' to its left side. The point O, called the origin, serves to represent the number 0. We next step off segments $OA = AB = BC = \ldots = 1$ unit of length to the right of O and $OA' = A'B' = B'C' = \ldots = 1$ unit of length to its left.

Then the points A, B, C, D, ... are used to represent the positive integers 1, 2, 3, ...and the points A', B', C', D', ...to represent the negative integers —1, —2, —3, ... This line l is called the *number line*.

2 ಮುಂದಿನ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು $p,\ q \in I,\ (q \neq 0)$ ಆಗಿರುವಂತೆ, $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 72·05 (ii) 0·0014 (iii) 11·5003

(iv) 5·0667667667................

(v) 13·461461461...............

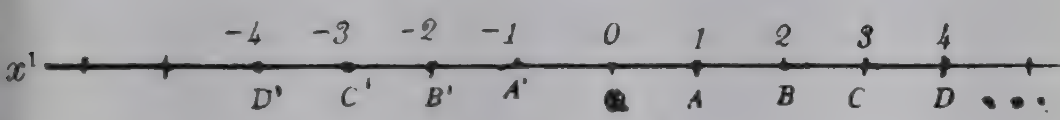
(vi) 11.70322603226032226...............

3 $\sqrt{3}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2.7 ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಒಂದು ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗವಿದೆ.

ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿರುವ l ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಚಿತ್ರ 2.1)



(ಚಿತ್ರ 2.1

O ಎಂಬ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು l ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದು ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ; ಇವುಗಳಲ್ಲಿ OX ಎಂಬುದು Oನ ಬಲಗಡೆಗೂ, OX' ಎಂಬುದು ಅದರ ಎಡಗಡೆಗೂ ಇವೆ. O ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟು ಅದರ ಬಲಗಡೆಗೆ $AO = AB = BC = \ldots\ldots = 1$ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮಾನವಿರುವಂತೆಯೂ, ಹೀಗೆಯೇ ಅದರ ಎಡಗಡೆಗೆ $OA' = A'B' = B'C' \ldots = 1$ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮಾನವಿರುವಂತೆಯೂ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ A, B, C, D . . . . ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ $1, 2, 3, 4,$ . . . . ಗಳನ್ನೂ, $A,'B,'C,'D',$ . . . . ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ $-1, -2 - 3 - 4$ . . . ಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

l ಎಂಬ ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

To represent a fraction x on this line we proceed as follows :

Let $x = \dfrac{p}{q}$ where $p, q \in I$ of which q may be considered positive

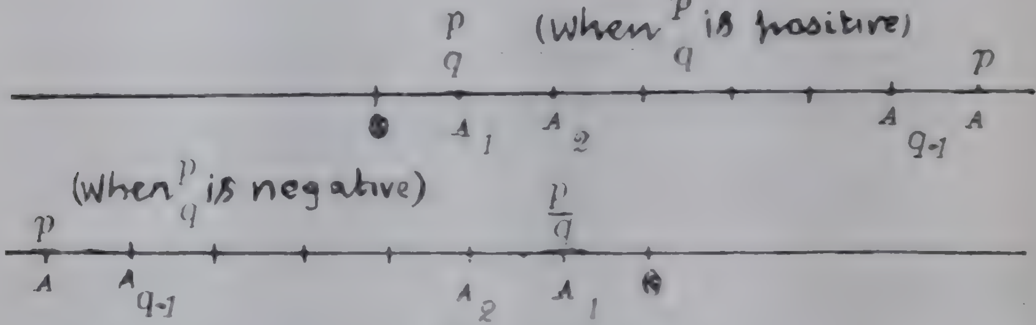


Fig. 2.2

We mark $OA = p$. The point A is to the right or to the left of O according as p is positive or negative, *i.e.*, as x is positive or negative. Now divide OA into q equal parts* at $A_1, A_2, \ldots A_{q-1}$. (Fig. 2·2)

Then A_1 represents $\dfrac{p}{q}$

Representation of $\sqrt{2}$ on the number line.

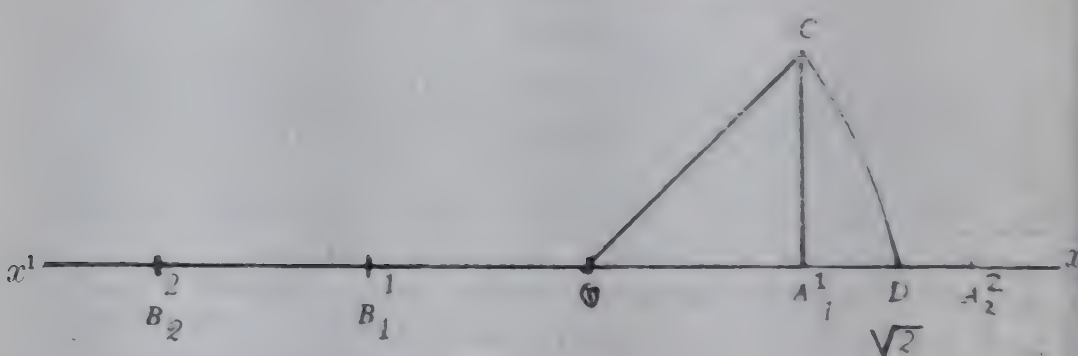


Fig. 2.3

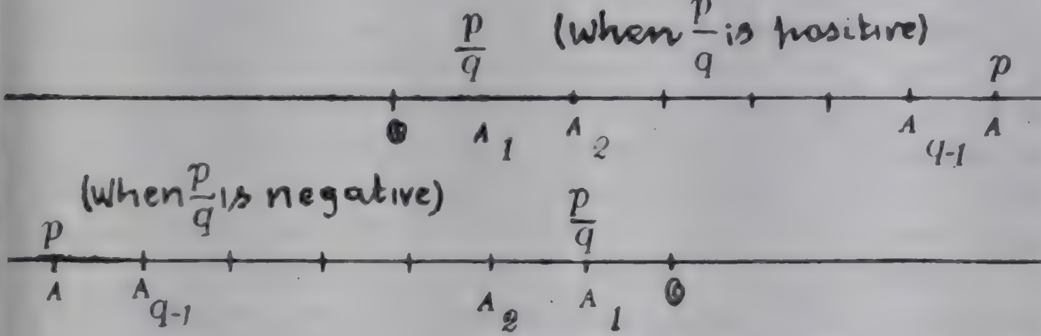
Erect $A_1C \perp OM$ and take $A_1C = OA_1 = 1$ unit of length.

Then $OC^2 = OA_1^2 + A_1C^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

*The method of construction is due to Euclid and will be found in books on elementary geometry.

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಈ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸುವ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿದೆ:

ದತ್ತಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in I$ ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ qವನ್ನು ಧನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

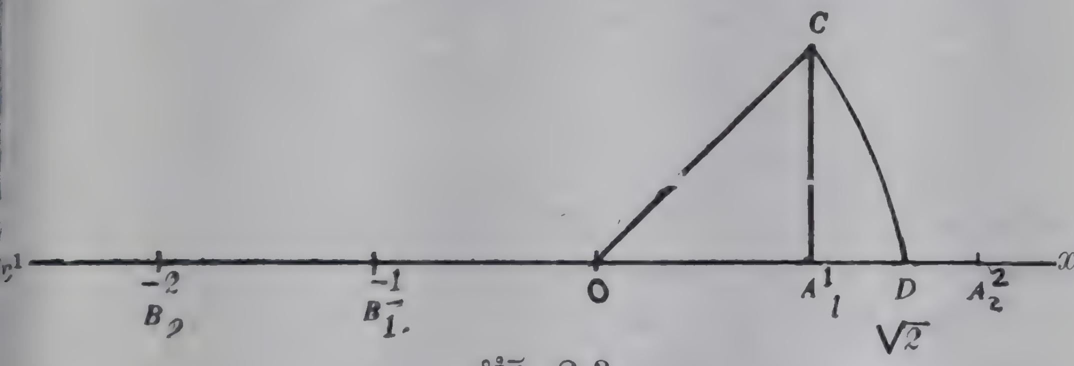


ಚಿತ್ರ 2.2

$OA = p$ ಇರುವಂತೆ, A ಬಿಂದುವನ್ನು, P ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ Oನ ಬಲಗಡೆಗೂ p ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದರ ಎಡಗಡೆಗೂ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ, xಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ Aಯು Oನ ಬಲಗಡೆಗೂ ಅದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದರ ಎಡಗಡೆಗೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ OAಯನ್ನು q ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ A_1, $A_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, A_{q-1}$ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿರಿ * ಆಗ A_1 ಬಿಂದು ವು p/qನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 2.2)

$\sqrt{2}$ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸುವಿಕೆ.



ಚಿತ್ರ 2.3

A_1C ಯನ್ನು OXಗೆ ಲಂಬವಾಗೆಳೆದು, $A_1C = OA_1 = 1$ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ,

$$OC^2 = OA_1^2 + A_1C^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

* ಈ ಛೇದನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾನೆ. ಸರಳ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

$\therefore$ OC is of length $\sqrt{2}$ units. If we now step off the segment $OD=OC$, to the right of O, D naturally represents $\sqrt{2}$ on l.

Thus we find that certain points on the number line represent rational numbers, and certain points represent irrational numbers. Now if we mark any point K on l, does it always represent a number which is rational or irrational? The answer to this question was given by the German Mathematician Richard Dedekind (1872) and constitutes what is known as Dedekind's Theorem of continuity. It states that any point chosen arbitrarily on the number line l always represents a number which is either rational or irrational.

This amounts to saying that all real numbers can be represented by means of points on the number line l, and conversely any point taken at random on l represents a real number.

2.8 Arithmetical operations in the set of Real Numbers

(1) *Closure*

If a and b are any two real numbers, then their sum $a+b$ and their product $a.b$ are also real numbers.

e.g. $4+7=11$,

$8\frac{1}{2}+12\frac{1}{4}=20\frac{3}{4}$

$(5+2\sqrt{2})+(4+3\sqrt{7})=9+2\sqrt{2}+3\sqrt{7}$

which are all real numbers.

Also $4\times 7=28\in R$.

$$8\tfrac{1}{2}\times 12\tfrac{1}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{49}{4}=\frac{833}{8}\in R$$

$\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{14}\in R$.

$$(5+\sqrt{2})\times(4+2\sqrt{2})=20+10\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4$$
$$=(24+14\sqrt{2})\in R.$$

$\therefore$ OCಯ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಮಾನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ O ನಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ lನ ಮೇಲೆ $OD=OC$ ಇರುವಂತೆ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ, D ಬಿಂದುವು $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಈಗ l ಮೇಲೆ K ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೋ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೋ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯೋ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ರಿಚರ್ಡ್ ಡೆಡೆಕಿಂಡ್ (1872) ಎಂಬ ಜರ್ಮನ್‌ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಉತ್ತರ ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾನೆ; ಇದು "ಡೆಡೆಕಿಂಡನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ" ವೆನಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ.

"lಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ, ಅದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೋ ಅಥವಾ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೋ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಎಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಯಾವ ಒಂದು ಬಿಂದುವೇ ಆಗಲಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ, ಎಂದು ಹೇಳಿದಂತಾಯಿತು.

2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

1) ಆವೃತಿ: a ಮತ್ತು bಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವಾದ $a+b$ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ abಗಳೂ ಸಹ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.

ಉದಾ: $4+7=11$

$8\frac{1}{2}+12\frac{1}{4}=20\frac{3}{4}$

$(5+2\sqrt{2})+(4+3\sqrt{7})=9+2\sqrt{2}+3\sqrt{7}$

ಇವೆಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.

ಮತ್ತು $4\times 7=28 \in \mathrm{R}$

$$8\tfrac{1}{2}\times 12\tfrac{1}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{49}{4}=\frac{833}{8} \in \mathrm{R}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{14} \in \mathrm{R}$$

$$(5+\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})=20+10\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4=(24+14\sqrt{2}) \in \mathrm{R}$$

This property is expressed by saying that "*The Set R is closed under addition and multiplication.*"

(2) *Associative Laws*

We notice that if $a, b, c \in R$,

then $(a+b)+c=a+(b+c)$

and $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

These are respectively the Associative laws of Addition and Multiplication.

(3) *The Commutative Laws*

If $a, b \in R$, then

(1) $a+b=b+a$ and (2) $a \times b = b \times a$

These are respectively the commutative laws of Addition and of Multiplication.

(4) *The identity*

If $a \in R$, then the number 0 is such that $a+0=a=0+a$, and the number 1 is such that $(a \times 1 = a = 1 \times a)$

For this reason, 0 is called the additive identity and 1 the multiplicative identity, in the set R of all real numbers.

(5) *The inverse*

Given a real number a, there exists the real number $-a$ such that

$$a+(-a)=o=(-a)+a$$

Here we call $(-a)$ as the additive inverse of a.

Notice that $+a$ is the additive inverse of $-a$.

"R ಎಂಬ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆ" ಎಂದು ಈ ಒಂದು ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

(2) ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ:--$a, b, c \in R$ ಆದರೆ,

$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮಗಳು.

(3) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮಗಳು

$a, b \in R$ ಆದರೆ,

(1) $a+b=b+a$ ಮತ್ತು (2) $a\times b=b\times a$

ಇವುಗಳೇ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮಗಳು.

(4) ಏಕ: $a \in R$ ಆದರೆ, 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು $a+0=0=0+a$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ, 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು $a\times 1=a=1\times a$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಆದ ಕಾರಣ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ R ಗಣದಲ್ಲಿ 0ಯನ್ನು ಸಂಕಲನದ ಏಕವೆಂದೂ, 1ನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(5) ಅನುಲೋಮ a ಎಂಬುದೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ

$(-a)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು R ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು $a+(-a)=0=(-a)+a$ ಆಗುವಂತಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕಾರಣದಿಂದ $(-a)$ಯನ್ನು aಯ ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$(-a)$ಯ ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮವು $+a$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

Again let $a \in R$. $a \neq 0$. Then $\frac{1}{a}$ also $\in R$ and is such that

$$a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$$

On account of this property, $\frac{1}{a}$ is said to be the multiplicative inverse of a.

Further, since $\frac{1}{a} = a$, it follows that a is the multiplicative inverse of $\frac{1}{a}$

(6) *The Distributive laws*

For all $a, b, c \in R$, the following relations are satisfied

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

These are called the distributive laws of multiplication with reference to addition.

Extension :—

$$(a+b) \times (c+d) = a \times (c+d) + b \times (c+d)$$

$$= ac + ad + bc + bd.$$

Similarly $(a+b+c) \times (d+e+f) =$ the sum of all products of terms one from the first bracket, and one from the second.

ಮತ್ತೆ $a \in R$, $a \neq 0$ ಆದರೆ, $\frac{1}{a}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು R ನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದು

$$a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$$ ಆಗುವಂತಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಗುಣದಿಂದ $\frac{1}{a}$ ಯನ್ನು a ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮುಂದೆ, $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$ ಆದುದರಿಂದ, $\frac{1}{a}$ ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವು a ಆಗುತ್ತದೆ.

(6) ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು. Rಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲ್ಲಾ a, b, c ಗಳೂ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುತ್ತವೆ.

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

ಇವನ್ನು ಸಂಕಲನಕ್ಕನುಗುಣವಾದ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳೆಂದು ಹೇಳುವೆವು.

ವಿಸ್ತರಣೆ

$(a+b) \times (c+d) = a \times (c+d) + b \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$ ಹೀಗೆಯೇ, $(a+b+c) \times (d+e+f) =$ ಮೊದಲನೆಯ ಆವರಣದಿಂದ ಒಂದು ಪದವನ್ನೂ ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಒಂದು ಪದವನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವಂಥ ಲಬ್ಧಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಮೊತ್ತ.

The basic laws satisfied by addition and multiplication in the set R of real numbers, may be summarised sa follows :

For all $a, b, c \in R$

	Law	*Addition*	*Multiplication*
1	Closure	$a+b \in R$	$a.b \in R$
2	Commutative law	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
3	Associative law	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).\ c=a.(b.c)$
4	Identity	0 is such that for all $a \in R$, $a+0=0+a=a$	1 is such that for all $a \in R$, $1.a=a.1=a$
5	Inverse	$a+(-a)=0=(-a)+a$	If $a \neq 0$, $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{a}{1} \times a$
6	Distributive laws	$a \times (b+c)=(b+c) \times a=(a.b)+(a.c)$	

2.9 Order Relation in the Set of Real Numbers.—Given two real numbers a and b, the equation $a+x=b$ can always be solved, with $x \in R$.

Here, if (1) x is a positive number, we say that a is ess than b, and write $a<b$,

if (2) $x=0$, $a=b$,

and if (3) x is a negative number, we say that a is greater than b, and write $a>b$.

This relation is called an order relation.

R ಎಂಬ ವಾಸವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಪರಿಪಾಲಿಸುವ ಮೂಲ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.

Rಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲಾ a, b, c ಗಳಿಗೂ,

ನಿಯಮ	ಸಂಕಲನ	ಗುಣಾಕಾರ
1 ಆವೃತಿ	$a+b \in R$	$a \cdot b \in R$
2 ಪರಿವರ್ತನೀಯ	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
3 ಸಹ ವರ್ತನೀಯ	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
4 ಏಕ	$a+0=0+a=a$ ಎಂದಾಗುವಂತೆ R ನಲ್ಲಿ 0ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.	$1 \cdot a=a \cdot 1=a$ ಎಂದಾಗುವಂತೆ R ನಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.
5 ಅನುಲೋಮ	$a+(-a)=0=(-a)+a$	$a \times \frac{1}{a}=1=\frac{1}{a} \times a$, $a \neq 0$
6 ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು	$a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c)=(b+c) \times a$	

2.9 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧ.

a, bಗಳೆಂಬ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ $a+x=b$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x \in R$ ಯಾವಾಗಲೂ ಇರುವಂತೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ (1) x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, aಯು bಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು, ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $a<b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) $x=0$ ಆದರೆ, $a=b$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(3) x ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, a ಯು b ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು $a>b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಗೆಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

We notice that if $a>b$, then $b<a$.

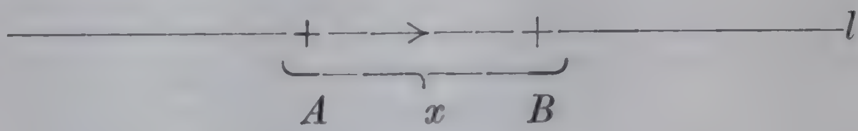
Proof :—Since $a>b$, there exists a negative number x such that $a+x=b$.

Adding $-x$ to both sides, we get

$a=b+(-x)$ where $(-x)$ is positive $\therefore$ by definition,

$$b<a.$$

Geometrical Representation :—



Let $a<b$. $\therefore$ there exists a positive number x such that $a+x=b$. Let A represent a on the number line l. Then b is represented on l by the point B, distant x from A to its right ; $\therefore$ if $a<b$, then A lies to the left of B.

Similarly if $a>b$, then A lies to the right of B.

If $a=b$ then A and B coincide. Since the origin O represents the number 0, if x is positive $x>0$, and if x is negative, $x<0$.

Properties of the Order Relation.

The law of trichotomy :—

(1) If $a, b \in R$, then one and only one of the following three relations holds :

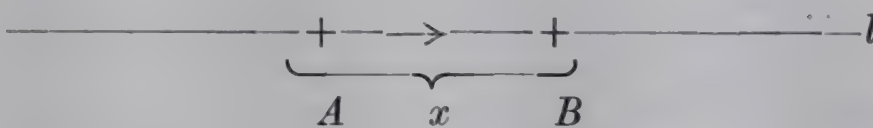
$$a<b, \ a=b \text{ or } a>b$$

This property is described as the law of Trichotomy.

$a>b$ ಆದರೆ, $b<a$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ : $a>b$ ಆದುದರಿಂದ, $a+x=b$ ಆಗುವಂತೆ, x ಎಂಬ ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ $(-x)$ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ, $a=b+(-x)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $(-x)$ ಎಂಬುದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ. $\therefore$ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, $b<a$,

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ:—



$a<b$ ಎಂದಿರಲಿ, $\therefore$ $a+x=b$ ಆಗುವಂತೆ x ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಾದ l ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವು a ಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲಿ. ಈಗ, Aಯ ಬಲಗಡೆಗೆ, ಅದರಿಂದ x ದೂರದಲ್ಲಿರುವ B ಎಂಬ ಬಿಂದುವು b ಯನ್ನು l ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. $\therefore$ $a<b$ ಆದರೆ, Aಯು Bಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $a>b$ ಆದರೆ, Aಯು Bಯ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. $a=b$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು Bಗಳು ಸಂಗಮಿಸುತ್ತವೆ. O ಎಂಬ ಮೂಲ ಬಿಂದುವು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದರಿಂದ, x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $x>0$ ಆಗಿಯೂ, x ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $x<0$ ಆಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ಗುಣಗಳು

(1) ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯ ನಿಯಮ :—$a, b \in R$ ಆದರೆ,

$a<b$, $a=b$, $a>b$ ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯ ನಿಯಮವೆನ್ನುವರು.

The Transitive Law :—

(2) If $a<b$ and $b<c$. then $a<c$. For, since $a<b$, there exists a positive number y such that $a+y=b$

And since $b<c$, there exists a positive number z such that

$$b+z=c$$

Now $c=b+z=(a+y)+z=a+(y+z)$ where $y+z=$ some positive number $=x$.

$\therefore\ a+x=c$ where x is positive.

$\therefore\ a<c$.

The law of addition :

(3) If $a<b$ and $c\leqslant d$. then $a+c<b+d$

For, $\because\ a<b\ \therefore$ there exists a positive number x such that

$$a+x=b$$

$\therefore\ a-b=-x$ is a negative number.

$\because\ c\leqslant d,\ \therefore$ there exists a number $y\geqslant 0$. such that

$$c+y=d$$

$$\therefore\ c-d=-y\leqslant 0.$$

Now $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ where

$$a-b<0 \text{ and } c-d\leqslant 0$$

$$\therefore\ (a+c)-(b+d)<0$$

$$\therefore\ (a+c)<(b+d)$$

(4) *The law of multiplication* :

If $a<b$, then $ka<kb$ if k is positive and $ka>kb$ if k is negative.

For, (1) When $k>0$, and $a<b$ *i.e.* $(a-b)<0$

$$\therefore\ ka-kb=k\,(a-b) \text{ is negative}$$

$$\therefore\ k(a-b)<0\ \therefore\ ka<kb.$$

(2) ವಾಹಕ ನಿಯಮ: $a<b$, $b<c$ ಆದರೆ $a<c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $a<b$ ಆದುದರಿಂದ, $a+y=b$ ಆಗುವಂತೆ y ಎಂಬ ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ; ಹಾಗೆಯೇ

$b<c$ ಆದುದರಿಂದ, $b+z=c$ ಆಗುವಂತೆ, z ಎಂಬ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ,

ಈಗ $c=b+z=(a+y)+z=a+(y+z)=a+x$

ಇಲ್ಲಿ $x=y+z$ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ.

$\therefore a<c$

(3) ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ: $a<b$ ಮತ್ತು $c\leqslant d$ ಆದರೆ $a+c<b+d$

ಏಕೆಂದರೆ, $a<b$ ಆದುದರಿಂದ $a+x=b$ ಆಗುವಂತೆ, x ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ $a-b=-x$, ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore\ a-b<0$

$c\leqslant d$ ಆದುದರಿಂದ, $c-d\leqslant 0$

$\therefore\ (a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)<0+0=0.$

$\therefore\ (a+c)-(b+d)<0 \quad \therefore (a+c)<(b+d).$

(4) ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮ.

$a<b$ ಆದರೆ, $k>0$ ಆದರೆ, $ka<kb$

ಮತ್ತು $k<0$ ಆದರೆ, $ka>kb$.

ಏಕೆಂದರೆ, $a<b \quad \therefore\ (a-b)<0$

ಈಗ $ka-kb=k(a-b)$

(1) ಇಲ್ಲಿ $k>0$ ಆದರೆ, $k(a-b)<0$

ಎಂದರೆ $ka-kb<0 \quad \therefore ka<kb$.

(2) Again when $k<0$,

$ka-kb=k(a-b)$ where both k and $(a-b)$ are negative $\therefore k(a-b)>0$.

$\therefore ka-kb>0$ ie $ka>kb$

(5) *The Reciprocal Law of the Order Relation* :—

If $0<a<b$, then

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ Now $a>0$, $b>0 \therefore ab>0 \therefore \frac{1}{ab}>0$ But $a<b$

Multipy both sides by $\frac{1}{ab}$

$$\therefore \frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$$

$\therefore \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ which implies $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,

e.g. $0<2<5$ Notice that $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$

Examples :—

(1) Evaluate $S=\{x|x\in I, 4x+11\geqslant 31\}$

$4x+11\geqslant 31=20+11$

Adding—11 to both sides

$(4x+11)-11\geqslant(20+11)-11$

$\therefore \quad 4x+(11-11)\geqslant 20+(11-11)$

$\therefore \quad 4x\geqslant 20$

Dividing by 4 $(\neq 0)$, we get,

$$x\geqslant 5$$

$\therefore \quad x=5, 6, 7, 8, \ldots$

$\therefore \quad S=\{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$

(2) ಆದರೆ, $k<0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, $k(a-b)>0$

ಎಂದರೆ $ka-kb>0 \quad \therefore\ ka>kb$

(5) ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ನಿಯಮ :

$0< a < b$ ಆದರೆ, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

ಈಗ $a<b$ ಮತ್ತು $ab > 0 \therefore \frac{1}{ab}>0$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ $\frac{1}{ab}$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$\frac{1}{ab}\cdot a < \frac{1}{ab}\cdot b$

$\therefore \frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$

ಉದಾ: $0 < 2 < 5$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು (1)

$S=\{x/x \in I,\ 4x+11 \geqslant 31\}$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$4x+11 \geqslant 31 = 20+11$

-11ನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$(4x+11)-11 \quad \geqslant(20+11)-11$

$\therefore 4x+(11-11)\geqslant 20+(11-11)$

$\therefore 4x\geqslant 20$

$4(\neq 0)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$\therefore x\geqslant 5$

$\therefore \quad x=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ldots\ldots$

$\therefore S=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\ldots\ldots\}$

(2) Find all integers x such that

$$7x+5<26$$

$$7x+5<26=21+5$$

Adding—5 to both sides

$$\therefore \quad 7x+(5-5)<21+(5-5)$$

$$\therefore \quad 7x<21$$

Dividing by 7 ($\neq 0$), we get

$$x<3$$

$$\therefore \quad x=2,\ 1,\ 0,\ 1-,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots$$

Absolute Value

If $x \in R$, then the absolute value of x, denoted by the symbol $|x|$ is defined as the positive value of x. The symbol is read as the modulus of x, or briefly mod x.

e.g. $|2| = 2$, $|9| = 9$, $|-4| = 4$, $|-7\frac{1}{2}| = 7\frac{1}{2}$.

Exercises.—2.2

I. Find (1) $\{x \mid x \in I,\ 3x+5<17\}$

(2) $\{x \mid x \in I,\ x+13>-4x-2\}$

(3) $\{x \mid x \in I,\ 3x-5 \geqslant 7-x\}$

(4) $\{x \mid x \in I,\ 2x+3 \leqslant -5-2x\}$

(5) $\{x \mid x \in I,\ 14x-17 \geqslant 13-x\}$

II Simplify the following :—

(1) $|3| + |7|$

(2) $3 - |3-4|$

(2)

$7x+5<26$ ಇರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$7x+5<26=21+5,$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಗೂ -5ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$7x+(5-5)<21+(5-5)$

$\therefore 7x<21.$

$7(\neq 0)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$x<3$ ಎಂಬುದು ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad x=2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots\ldots\ldots$

ಧನಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯ

$x\in R$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಧನಾಂಶದ ಬೆಲೆಯನ್ನು, xನ ಧನಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ; ಇದನ್ನು $|x|$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು x ನ ಮಾಡುಲಸ್ ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ''ಮಾಡ್ x'' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $|2|=2,\quad |0|=0,\quad |-4|=4,$
$|-7\frac{1}{2}|=7\frac{1}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

I ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\{x \mid x\in I,\quad 3x+5<17\}$
(2) $\{x \mid x\in I,\quad x+13>-4x-2\}$
(3) $\{x \mid x\in I,\quad 3x-5\geqslant 7-x\}$
(4) $\{x \mid x\in I,\quad 2x+3\leqslant -5-2x\}$
(5) $\{x \mid x\in I,\quad 14x-17\geqslant 13-x\}$

II ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :

(1) $|3|+|7|$
(2) $3-|3-4|$

(3) $|-5| \times |13|$

(4) $-(|-12+3|)$

(5) $(|-3|-3) \times 5$

2.10 Complex Numbers.—In the course of solution of quadratic equations, sometimes we come across quantities of the form $\sqrt{(\text{a negative number})}$

e.g. in the case of the equation

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$

Taking square roots we get $x=\pm\sqrt{-1}$

Similarly for the equation $x^2+x+1=0$

$$\text{we get } x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2}$$

Thus the symbol $\sqrt{-1}$ finds its entry into our calculations.

However there is no real number, whose square is -1. Thus, solution of quadratic equations is not always possible within the set R of real numbers. For this purpose, we need to extend the number system still further.

In order that the equation $x^2+1=0$ may have solution in this extended system, we need to have the symbol $i=\sqrt{-1}$ as a number, and we must use it in all the arithmetical operations, along with other numbers, subject only to the relation $i^2=-1$.

The new number thus postulated is called the imaginary unit, and it will be seen that by combining it along with other numbers, any quadratic equation can be solved

(3) $|-5| \times |-13|$

(4) $-(|-12+3|)$

(5) $(|-3|-3) \times 5$

2.10 ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ $\sqrt{(\text{ಋಣಸಂಖ್ಯೆ})}$ ಈ ತರದ ಪರಿಮಾಣಗಳು ತಲೆದೋರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: $x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x^2=-1$

$\therefore$ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $x=\pm\sqrt{-1}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $x^2+x+1=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ,

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $\sqrt{-1}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, -1 ಎಂಬುದನ್ನು ವರ್ಗವಾಗಿ ಇರುವ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ R ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲೇ ಇದ್ದುಕೊಂಡು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಬಿಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಉದ್ದೇಶದಿಂದಲೇ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿ,

$x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ, $i=\sqrt{-1}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಲ್ಲೂ, $i^2=-1$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹ್ಯಾ ಏಕ (ಊಹಾ ಜನಕ ಏಕ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡರೆ. ಯಾವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

e.g. $x^2+1=0$ has the solutions $x=\pm\ i$; $x^2+x+1=0$ has the solutions

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\ \sqrt{3}}{2}$$

The solution of the general quadratic equation will be taken up in a later chapter.

A number of the form $a+ib$, where a and b are real numbers, is called a complex number ; a is called its real part and $i\ b$ its imaginary part. The set of all complex numbers is denoted by C. This set contains every real number for any real number a can be written as $a+i0$ $\therefore R\subset C$

A complex number of the form $0+ib$, with its real part zero, will be called purely imaginary. Thus a purely imaginary number is of the form ib where $b\in R$. The real number 0 is written as a complex number in the form $0+i0$.

Equality and Arithmetical Operations.

(1) Two complex numbers $a+ib$ and $c+id$ are said to be *equal* and written as

$a+ib=c+id$ if $a=c$ and $b=d$

(2) *Addition* :—Addition of complex numbers $a+ib$, $c+id$ is defined by the formula

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

which is again a complex number.

$\therefore$ C is *closed* under addition.

Further, since

$$a+c=c+a \text{ and } b+d=d+b$$

it follows that

$$(a+ib)+(c+id)=(c+id)+(a+ib)$$

$\therefore$ Addition of complex numbers is *Commutative.*

ಉದಾ (1) $x^2+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\pm i$.

(2) $x^2+x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$ ಆಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯ ವೊಂದರಲ್ಲಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

a ಮತ್ತು b ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $a+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, aಯನ್ನು ಅದರ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ ವೆಂದೂ, ibಯನ್ನೂ ಅದರ ಊಹ್ಯಭಾಗವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಗಣವನ್ನು C ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಈ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, a ಎಂಬ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $a+i0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ ?

$\therefore R\subset C$

ತನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ, $0+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಹೀಗೆ, ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ib, [ಇಲ್ಲಿ $(b\in R)$] ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. 0 ಎಂಬ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯನ್ನು $0+i0$ ಎಂದು ಮಿಶ್ರ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಬಹುದು.

ಸಮತ್ವ ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

(1) $a=c$ ಮತ್ತು $b=d$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a+ib$ ಮತ್ತು $c+id$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು $a+ib=c+id$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) ಸಂಕಲನ : ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು $(a+id)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $(a+c)+i(b+d)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.

$\therefore$ C ಎಂಬ ಗಣವು ಸಂಕಲನದ ಬಗ್ಗೆ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೆ, $a+c=c+a$, $b+d=d+b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$(a+ib)+(c+id)=(c+id)+(a+ib)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

It is easy to verify *the associative law.*

$$[(a+ib) + (c+id)] + (e+if) = (a+ib) + [(c+id) + (e+if)]$$

The additive identity $0=0+i0$ is the additive identity in the set C of all complex numbers.

For $(a+ib) + (o+io) = (a+o) + i(b+o) = a+ib$.

Again by the commutative law

$(o+io)+(a+ib)=a+ib$

(2) *The additive inverse* :— The complex number

$a+ib$ has $(-a)+i(-b)$

$=-a-ib$ for its additive inverse. for

$(a+ib)+[(-a)+i(-b)]=(a-a)+i(b-b)=o+io=$

$\therefore a+ib$ and $(-a)+i(-b)$ are additive inverses of each other.

(2) *Subtraction* is defined by

$(a+ib)-(c+id)=(a+ib)+[(-c)+i(-d)$

as the inverse of addition.

(3) *Multiplication* : $a+ib$ and $c+id$ are multiplied like ordinary binomial expressions as follows :

$(a+ib) \times (c+id)=ac+aid+ibc+ibid$

Using the commutative and associative laws of addition and multiplication we write this as

ಮುಂದೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸರಿ ನೋಡಬಹುದು :

$$[(a+ib) + (c+id)] + (e+if) = (a+ib) + [(c+id) + (e+if)]$$

ಸಂಕಲನದ ಏಕ :— $0=0+i0$ ಎಂಬುದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ C ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಏಕವಾಗಿ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ,

$$(a+ib) + (0+i0) = (a+0) + i\ (b+0) = a+ib$$

ಪುನಃ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮದಿಂದ,

$(0+i0) + (a+ib) = a+ib$, ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(1) ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮ :—$(a+ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $(-a)+i\ (-b)$ ಎಂಬುದು ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮವಾಗಿ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ,

$$\begin{aligned}(a+ib) + [(-a) + i\ (-b)] &= (a-a) + i\ (b-b) \\ &= 0+i0 = 0.\end{aligned}$$

$\therefore$ $(a+ib)$ ಮತ್ತು $(-a) + i\ (-b)$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ವ್ಯವಕಲನ : $(a+ib) - (c+id) = (a+ib) + [(-c) + i\ (-d)]$ ಎಂಬುದಾಗಿ, ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮದಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

(3) ಗುಣಾಕಾರ : $(a+ib)$ ಮತ್ತು $(c+id)$ ಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ದ್ವಿಪದಗಳಂತೆಯೇ ಮುಂದೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

$(a+ib) \times (c+id) = ac+aid+ibc+ibid$ ಈಗ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನನುಸರಿಸಿ,

$$(a+ib)\times(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd$$

But $i^2=-1$ $\therefore$ the product $=(ac-bd)+i(ad+bc)$

$$\therefore\ (a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

which is again a complex number

$\therefore$ C is closed under multiplication.

Conjugate complex numbers

If a and b are real, $a+ib$ and $a-ib$ are said to be conjugate complex numbers. We notice the following interesting results relating to such pairs of complex numbers.

(1) The sum of two conjugate complex numbers is a real number.

For $(a+ib)+(a-ib)=a+(ib-ib)+a=2a\in R$

(2) The difference between two conjugate complex numbers is a purely imaginary number.

For $(a+ib)-(a-ib)=(ib+a)-(a-ib)$

$=ib+(a-a)+ib$

$=2ib$ which is purely imaginary.

(3) The Product of two conjugate complex numbers is a real number.

For $(a+ib)\ (a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$

which is a real number.

$$(a+ib) \times (c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $i^2 = -1$

$$\therefore \quad \text{ಲಬ್ಧ} = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$$

ಎಂದರೆ, $(a+ib) \times (c+id) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$

ಈ ಲಬ್ಧವೂ ಒಂದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯೇ. ಆದುದರಿಂದ, C ಎಂಬ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.

ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

a, b ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $a+ib$ ಮತ್ತು $a-ib$ ಗಳನ್ನು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ತೆರನಾದ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರಸವತ್ತಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(1) ಎರಡು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, $(a+ib) + (a-ib) = a + (ib-ib) + a$
$= 2a \in R.$

(2) ಎರಡು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದು ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, $(a+ib)-(a-ib) = (ib+a)-(a-ib)$
$= ib + (a-a) + ib$
$= 2ib.$ (ಇದು ಶುದ್ಧ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ)

(3) ಎರಡು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, $(a+ib)\,(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2 + b^2$
(ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ)

Further, $(c+id)\ (a+ib) = (ca-db)+i(da+cb)$

$$=(ac-bd)+i\ (ad+bc)$$

$$=(a+ib)\ \times\ (c+id)$$

$\therefore$ Multiplication of complex numbers is Commutative. (1)

It is also easily verified that the associative law

$[(a+ib)\times(c+id)]\times(e+if)=(a+ib)\times[(c+id)\times$ $(e+if)]$ holds good. (2)

We have $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

Taking $c+id=1+i0=1$ we have

$$(a+ib)\ (1+io)=a+ib=(1+io)(a+ib)$$

$\therefore$ $1+io=1$ is the multiplicative identity or the unity in C (3)

(4) *Multiplicative inverse ; Division in the set of all Complex Numbers*

Let $a+ib$ be the given complex number. We want to find, when it exists, the number $x+iy$ such that

$$(a+ib)\ (x+iy)\ =\ (1+i0)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad \text{I}$$

Or in other words, we want to find, when it exists the number $x+iy$, such that

$$\frac{1+io}{a+ib}\ =\ (x+iy)\ .\ .\ .\ .\quad \text{II}$$

Multiply both sides of I by $(a-ib)$

ಅಲ್ಲದೆ,

$$(c+id) \times (a+ib) = (ca-db) + i\,(da+cb)$$
$$= (ac-bd) + i\,(ad+bc)$$
$$= (a+ib) \times (c+id)$$

ಆದುದರಿಂದ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನನುಸರಿಸುತ್ತದೆ. (1)

ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

$$[\,(a+ib) \times (c+id)\,] \times (e+if) = (a+ib) \times [\,(c+id) \times (e+if)\,) \qquad (2)$$

ಈಗ $(a+ib)\,(c+id) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$

ಇದರಲ್ಲಿ $c+id = 1+i0 = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$(a+ib)\,(1+i0) = a+ib = (1+i0)\,(a+ib)$

$\therefore$ $1+i0=1$ ಎಂಬುದು C ಯಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವಾಗಿ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ. (3)

(4) ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮ ; ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರ

$a+ib$ ದತ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈಗ $(a+ib)\,(x+iy) = 1+i0$ (I)

ಆಗುವಂತೆ, $x+iy$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅದು ಇದ್ದದ್ದೇ ಆದರೆ ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ?

ಅಥವಾ, ಅಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ,

$$\frac{1+i0}{a+ib} = x+iy \qquad \text{(II)}$$

ಆಗುವಂತೆ, $x+iy$ ಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು ?

ಇದಕ್ಕಾಗಿ, (I) ರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ $(a-ib)$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\therefore (a-ib)\ (a+ib)\ (x+iy) = (a-ib)\ (1+io)$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2)\ (x+iy) = (a-ib)$$

$\therefore$ if $a^2+b^2 \neq o$, dividing both sides by (a^2+b^2)

$$(x+iy) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

This is the multiplicative inverse of $(a+ib)$, and it belongs to C.

Note :—(1) $x+iy$ exists if $a^2+b^2 \neq 0$. This just requires that one at least of a and b should be $\neq 0$. But then $a+ib \neq o$.

Thus all complex numbers. except $0+i0$ have their multiplicative inverses in C.

(2) Further, II shows that $x+iy = \dfrac{1}{a+ib}$

Hence, the familiar notation $(x+iy) = (a+ib)^{-1}$ is used, for the multiplicative inverse of $(a+ib)$.

In general. division is possible in C. whenever the divisor $\neq 0$. Let $a+ib \neq 0$ and consider

$$\frac{A+iB}{a+ib} = x+iy.$$

Multiply on both sides by $(a-ib)\ (a+ib)$

$$(A+iB)\ (a-ib) = (x+iy)\ (a^2+b^2)$$

$$\therefore \quad (Aa+Bb)+i\ (Ba-Ab) = (x+iy)\ (a^2+b^2)$$

Now $a+ib \neq 0$ $\therefore$ $a^2+b^2 \neq 0$. Dividing by (a^2+b^2) we get

$$x+iy = \frac{Aa+Bb}{a^2+b^2} + i\ \frac{Ba-Ab}{a^2+b^2} = \frac{A+iB}{a+ib}$$

$\therefore \quad (a-ib)(a+ib)(x+iy) = (a-ib)(1+i0)$

$\therefore \quad (a^2+b^2)(x+iy) = a-ib$

$\therefore \quad a^2+b^2 \neq 0$ ಆದರೆ, ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ (a^2+b^2) ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

$$\therefore \quad x+iy = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

ಇದೇ, $(a+ib)$ ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವಾಗಿದೆ,

ಮತ್ತು ಅದು C ಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ.

ಗಮನಿಸಿ :—(1) $a^2+b^2 \neq 0$ ಆದರೆ, $x+iy$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ $\neq 0$ ಇರಬೇಕು.

ಆದರೆ, ಆಗ $a+ib \neq 0 \;\therefore\; 0+i0$ಯನ್ನು ಹೊರತು, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ, Cಗಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವಿರುತ್ತದೆ.

(2) ಮೇಲಾಗಿ, (II) ರಿಂದ $x+iy = \dfrac{1}{a+ib}$ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದಕಾರಣ, $x+iy=(a+ib)^{-1}$ ಎಂಬ ಪರಿಚಯವಾದ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ, $(a+ib)$ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಭಾಜಕವು 0 ಅಲ್ಲದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, C ಗಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಹಾರವು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

$a+ib \neq 0$ ಇರಲಿ. $\dfrac{A+ib}{a+ib} = x+iy$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ $(a-ib)(a+ib)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$\therefore (A+iB)(a-ib) = (x+iy)(a^2+b^2)$

$\therefore (Aa+Bb)+i(Ba-Ab) = (x+iy)\; a^2+b^2)$

ಈಗ $a+ib \neq 0 \quad \therefore a^2+b^2 \neq 0.$ (a^2+b^2) ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$x+iy = \frac{Aa+Bb}{a^2+b^2} + \text{i}\,\frac{Ba-Ab}{a^2+b^2} = \frac{A+iB}{a+ib}$$

5. *Distributive Laws of Multiplication w.r.t. addition*

The distributive laws

$(a+ib)\times[(A+iB)+(C+iD)]=(a+ib)\ (A+iB)+(a+ib$

$(C+iD)\ =\ [(A+iB)+(C+iD]\times(a+ib)$

can be easily verified by actual multiplication, anc simplification.

Exercises 2.3

I Simplify the following and write down thei conjugates.

(1) $(4-3i)\times(8+2i)+14-12i$

(2) $\{(6+2i)-(8+3i)\}\ \times\ (-5+2i)$

II Find the multiplicative inverse of each of th following, expressing them in the form $A+iB$ where A and B are real.

$(2+3i)$, $(-1-i)$, $(3-2i)$, $(1-i)$, $(2-i)$

III Express the following in the form $A+iB$ where A and B are real.

$$Z_1=\frac{1+i}{1-i}\qquad Z_2=\frac{2-3i}{2+i}\ ,\ Z_3=\frac{(1+i)^2}{(1-i)}$$

$$Z_4=\frac{2+i}{(1+i)^2}\ ,\ Z_5=\frac{2+5i}{(3+i)^2}\ .$$

IV Evaluate : $Z_1\ Z_2$, $Z_2\ Z_3$, $Z_3\ Z_4$. $Z_4\ Z_5$, $Z_5\ Z_1$, for Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5. given in Ex. III.

V Using the notation $\overline{Z}$ for the conjugate $x-iy$ of the number $Z=x+iy$, evaluate $\overline{Z}_1\ \overline{Z}_2$. $\overline{Z}_2\ \overline{Z}_3$. $\overline{Z}_3\ \overline{Z}_4$ $\overline{Z}_4\ \overline{Z}_5$, $\overline{Z}_5\ \overline{Z}_1$.

VI Calculate :

$$\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}\ ,\ \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3}\ ,\ \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_4}\ ,\ \frac{\overline{Z}_4}{\overline{Z}_5}\ ,\ \frac{\overline{Z}_5}{\overline{Z}_1}\ .$$

(5) ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು

$(a+ib)\times[(A+iB)+(C+iD)]=(a+ib)\ (A+iB)$
$\quad +(a+ib)\ (C+iD)=[(A+iB)+(C+iD)]\times(a+ib)$

ಗುಣಿಸಿ, ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದರ ಮೂಲಕ ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸರಿ ನೋಡಬಹುದು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

I ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುವರ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1) $(4-3i)\times(8+2i)+14-12i$

2) $\{(6+2i)-(8+3i)\}\times(-5+2i)$

II ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವನ್ನು $A+iB$, (A, B ವಾಸ್ತವ) ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸಿರಿ.

$(2+3i)$, $(-1-i)$, $(3-2i)$, $(1-i)$, $(2-i)$.

III ಇವುಗಳನ್ನು $A+iB$, (A, B ವಾಸ್ತವ) ರೂಪದಲ್ಲಿಡಿ.

$$Z_1=\frac{1+i}{1-i},\ Z_2=\frac{2-3i}{2+i},\ Z_3=\frac{(1+i)^2}{1-i}$$

$$Z_4=\frac{2+i}{(1+i)^2},\ Z_5=\frac{2+5i}{(3+i)^2}$$

IV ಮೇಲಿನ IIIನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 ಗಳನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು Z_1Z_2, Z_2Z_3, Z_3Z_4, Z_4Z_5, Z_5Z_1 ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

V $\overline{Z}$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು $Z=x+iy$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುವರ್ತಿಯಾದ $(x-iy)$ಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\overline{Z_1}\overline{Z_2}$, $\overline{Z_2}\overline{Z_3}$, $\overline{Z_3}\overline{Z_4}$, $\overline{Z_4}\overline{Z_5}$ ಮತ್ತು $\overline{Z_5}\overline{Z_1}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

VI ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}},\ \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_3}},\ \frac{\overline{Z_3}}{\overline{Z_4}},\ \frac{\overline{Z_4}}{\overline{Z_5}},\ \frac{\overline{Z_5}}{\overline{Z_1}}$$

CHAPTER 3

Indices, Surds and Logarithms

3·1 Laws of Indices.

If $a \in R$, and $n \in N$, we define a^n as follows:

$a^n = a . a . a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a$, the product on the right containing n factors, each of which is a. Here R is the set of all real numbers, and N the set of all natural numbers.

The process of getting a^n starting with a is called raising a to the power n, and n is called the index of this power of a.

From this definition of an index we prove the following laws of indices.

I (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ where $a \in R$ and $m, n \in N$. For $a^m \times a^n = (a \cdot a \cdot \cdot \cdot a) \times (a \cdot a \cdot \cdot \cdot a)$
to m factors to n factors

By a repeated application of the associative law of multiplication we get $a^m \times a^n = (a \cdot a \cdot \cdot \cdot a \times a....a)$ to $(m+n)$ factors

$= a^{m+n}$ by the definition of an index.

$$\text{Thus} \quad \boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}} \quad \ldots\ldots (3.1)$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \text{ if } m>n, \\ \frac{a^m}{a^n} &= \frac{1}{a^{n-m}} \text{ if } n>m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.1a)$$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಘಾತಾಂಕಗಳು, ಕರಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

3.8 ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

$a \in R$ ಮತ್ತು $n \in N$ ಆದರೆ a^n ನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ.

$a^n = a.a.a \ldots\ldots a$ ಇಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ a ಆಗಿರುವಂತೆ n ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ R ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನೂ N ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

a ಯಿಂದ ಮೊದಲು ಮಾಡಿ a^n ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗೆ a ಯನ್ನು n ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವುದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು n ಎಂಬುದನ್ನು a ಯ ಈ ಘಾತದ ಘಾತಾಂಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಘಾತಾಂಕದ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

I (*a*) $a \in R,\ m, n \in N$ ಆದರೆ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ಏಕೆಂದರೆ $a^m \times a^n = (\underbrace{a.a \ldots\ldots a}_{m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}}) \times (\underbrace{a. \ldots\ldots a}_{n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}})$

ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ,

$$a^m \times a^n = (\underbrace{a.a \ldots\ldots a \times a \ldots\ldots a}_{(m+n) \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}})$$

$$= a^{m+n} \qquad \text{ಘಾತಾಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಮೇರೆಗೆ,}$$

ಹೀಗಾಗಿ $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ . . . .(3·1)

(*b*)

$$\left.\begin{array}{l} m > n \text{ ಆದರೆ, } \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\[2ex] m < n \text{ ಆದರೆ, } \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3{\cdot}1a)$$

for $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{(a \cdot a \cdot a \ldots m \text{ factors})}{(a \cdot a \cdot a \ldots n \text{ factors})}$

If now $m>n$, by cancelling each of the n a's in the denominator, against n of the m a's in the numerator, we are left with a^{m-n} in the numerator and 1 in the denominator.

$$\therefore \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n}}{1} = a^{m-n} \text{ if } m>n.$$

Similarly, it can be verified that

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ if } m<n.$$

II $(a^m)^n = a^{mn}$.

for $(a^m)^n = [(a^m)\,(a^m)\,(a^m) \ldots\ldots\ldots n \text{ factors}.]$

Now expanding a^m in each case, we get

$(a^m)^n = [(a.a \ldots m \text{ factors})\,(a.a. \ldots m \text{ factors}) \ldots$
$(a.a. \ldots m \text{ factors})]$

Opening each of the n round brackets, we find that within the square brackets a is multiplied by itself $m \times n$ times.

$\therefore$ R.H.S. $= a^{mn}$, by definition of an index.

$$\therefore \quad \boxed{(a^m)^n = a^{mn}.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2)$$

III $(ab)^m = a^m b^m$ and $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

For $(ab)^m = (ab) \times (ab) \times (ab) \times \ldots\ldots$ to m factors by definition of an index.

$= (a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ to m factors$)$
$\times (b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots$ to m factors$)$
[using the associative and commutative laws.]

$\therefore$ $\boxed{(ab)^m = a^m \cdot b^m}$ by definition of an index.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3)$

Again $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \ldots\ldots\ldots\ldots$ to m factors.

ಏಕೆಂದರೆ, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{(a.a.a. \ldots \ldots \ldots m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}{(a.a.a. \ldots \ldots \ldots n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}$

ಈಗ $m > n$ ಆದರೆ, ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ n , a ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನೂ ಅಂಶ ದಲ್ಲಿರುವ m , a ಗಳಲ್ಲಿರುವ n , a ಗಳೊಂದಿಗೆ ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ ಅಂಶದಲ್ಲಿ a^{m-n} ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ 1 ಉಳಿಯುತ್ತವೆ.

$\therefore$ $m > n$ ಆದರೆ, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n}}{1} = a^{m-n}$

ಹೀಗೆಯೇ, $m < n$ ಆದರೆ, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ ಎಂದು ಸರಿನೋಡಬಹುದು.

II $(a^m)^n = a^{mn}$

ಏಕೆಂದರೆ, $(a^m)^n = [(a^m)\ (a^m)\ (a^m)\ \ldots \ldots \ldots n \ldots$ ಅಪವರ್ತನಗಳು]

ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (a^m) ನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ,

$(a^m)^n = [(a.a \ldots \ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು) $(a,a \ldots \ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು) $(a.a \ldots \ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು)]

ಇದರಲ್ಲಿ ದುಂಡು ಆವರಣಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಚೌಕಾವರಣದೊಳಗೆ a ಯು ತನ್ನಿಂದಲೇ $m \times n$ ಸಲ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದು ಕಾಣುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಬಲಪಾರ್ಶ್ವ $= a^{mn}$ ಎಂದು ಘಾತಾಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಲೇ ತೋರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \boxed{(a^m)^n = a^{mn}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3.2)$$

III $(ab)^m = a^m b^m$ ಮತ್ತು $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

ಏಕೆಂದರೆ, $(ab)^m = (ab) \times (ab) \times (ab) \times \ldots \ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು.
(ಘಾತಾಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ)

$= (a \times a \times a \ldots . m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು) $(b \times b \times b \times \ldots . m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು)
[ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮಗಳಿಂದ]

$$\therefore \boxed{(ab)^m = a^m b^m}$$ (ಘಾತಾಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ) . . . .(3·3)

ಮತ್ತೆ, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \ldots . m$ ಅಪವರ್ತಗಳತನಕ

$$= \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \text{to } m \text{ factors.}}{b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots \text{to } m \text{ factors.}}$$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}} \qquad \ldots\ldots(3.3a)$$

Examples

1 Simplify :— $\frac{(2^4)^2 \cdot (3^4)^2 \cdot (42)^5}{(21)^5 \cdot (24)^2 \cdot (12^2)^2}$

$$= \frac{(2^4)^2 \cdot (3^4)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^5}{(3 \cdot 7)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^2]^2}$$

$$= \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot [2^4 \cdot 3^2]^2} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot 3^4}$$

$$= \frac{2^{8+5} \cdot 3^{8+5} \cdot 7^5}{2^{6+8}\ 3^{5+2+4} \cdot 7^5} = \frac{2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 7^5}{2^{14} \cdot 3^{11} \cdot 7^5}$$

$$= \frac{3^{13-11}}{2^{14-13}} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

2 Simplify :— $\frac{(3a^3x^3y^3)^3}{(2a^2by^2)^4} \div \left(\frac{a^2b^2x^8y^5z^3}{12b^2x^4}\right)^2$

$$= \frac{3^3(a^3)^3(x^3)^3(y^3)^3}{2^4(a^2)^4b^4(y^2)^4} \div \frac{(a^2)^2(b^2)^2(x^8)^2(y^5)^2}{(2^2)^2 3^2 (b^2)^2 (x^4)^2}$$

$$= \frac{3^3a^9x^9y^9}{2^4a^8b^4y^8} \div \frac{a^4b^4x^{16}y^{10}}{2^4 \cdot 3^2b^4x^8}$$

$$= \frac{3^3a^9x^9y^9}{2^4a^8b^4y^8} \times \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot b^4x^8}{a^4 \cdot b^4 \cdot x^{16}y^{10}}$$

$$= \frac{2^4 \cdot 3^{3+2}a^9b^4x^{9+8}y^9}{2^4 \cdot a^{8+4}b^{4+4}x^{16}y^{8+10}} = \frac{3^5a^9b^4x^{17}y^9}{a^{12}b^8x^{16}y^{18}}$$

$$= 3^5 \cdot \frac{x^{17-16}}{a^{12-9}\ b^{8-4}\ y^{18-9}}$$

$$= 3^5\ \frac{x}{a^3b^4y^9} = \frac{3^5x}{a^3b^4y^9}$$

$$= \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots (m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}{b \times b \times b \times \ldots\ldots (m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}} \qquad \ldots\ldots(3 \cdot 3a)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1 ಇದನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:—

$$\frac{(2^4)^2 \cdot (3^4)^2 \cdot (42)^5}{(21)^5 \cdot (24)^2 \cdot (12^2)^2}$$

$$= \frac{(2^4)^2 \cdot (3^4)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^5}{(3 \cdot 7)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^2]^2} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot 3^4}$$

$$= \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5}{2^{6+8} \; 3^{5+2+4} \cdot 7^5} = \frac{2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 7^5}{2^{14} \cdot 3^{11} \cdot 7^5}$$

$$= \frac{3^{13-11}}{2^{14-13}} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

2 ಇದನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ: $\frac{(3a^3x^3y^3)^3}{(2a^2by^2)^4} \div \left(\frac{a^2b^2x^8y^5z^3}{12b^2x^4}\right)^2$

$$= \frac{3^3(a^3)^3(x^3)^3(y^3)^3}{2^4(a^2)^4(b)^4(y^2)^4} \div \frac{(a^2)^2(b^2)^2(x^8)^2(y^5)^2(z^3)^2}{(2^2)^2 \times 3^2(b^2)^2(x^4)^2}$$

$$= \frac{3^3a^9x^9y^9}{2^4a^8b^4y^8} \div \frac{a^4b^4x^{16}y^{10}}{2^4 \cdot 3^2b^4x^8}$$

$$= \frac{3^3a^9x^9y^9}{2^4a^8b^4y^8} \times \frac{2^4 \cdot 3^2b^4x^8}{a^4b^4x^{16}y^{10}}$$

$$= \frac{2^4 \cdot 3^{3+2}a^9b^4x^{9+8}y^9}{2^4a^{8+4}b^{4+4}x^{16}y^{8+10}} = \frac{3^5a^9b^4x^{17}y^9}{a^{12}b^8x^{16}y^{18}}$$

$$= 3^5 \frac{x^{17-16}}{a^{12-9}b^{8-4}y^{18-9}}$$

$$= 3^5 \frac{a}{a^3b^4y^9} = \frac{3^5x}{a^3b^4y^9}$$

Exercises 3·1

Simplify the following :—(All the indices are positive integers).

1 $\dfrac{(49)^2\cdot(24)^6\cdot(5\cdot3^2\cdot2^3)^3}{(42)^2\cdot(2^4\cdot3^2\cdot7)^3}$.

2 $\left(\dfrac{3a^2x^3y^4}{4a^3b^2x^2y}\right)^3 \times \left(\dfrac{2a^3by^3z^2}{3^2\cdot a^2x^4y^5}\right)^2$

3 $\dfrac{(a^x)^x\times(a^y)^y}{(a^x)^y\times(a^z)^x} \div \left(\dfrac{a^z}{a^xa^y}\right)^z$

4 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{x-y}\right)^2 \left(\dfrac{x^2-y^2}{a+b}\right)^3 \div \left(\dfrac{y^2-x^2}{a+b}\right)^3$

5 $\left(\dfrac{3a^2x^3yz}{2x^4y^2}\right)^2 \div \left(\dfrac{2a^2x^4y^2}{3a^5x^2z^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{10x^3y^2z^4}{3x^2y^2z}\right)^2$

3.2 Fractional and Negative Indices.

We have so far defined a^m assuming m to be a positive integer. However, the generalising spirit of algebra requires proper meanings to be attached to the symbol a^m for any rational value of m.

We proceed by assuming that the fundamental index law

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}} \qquad \ldots (3.1')$$

holds for all m and $n \in Q$, the set of rational numbers.

We can then assign proper interpretations for $a^{p/q}$, a°, and a^{-n} where $a \in R$. $p, q, n \in N$.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3·1

ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :—(ಇಲ್ಲಿ ಘಾತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.)

1. $$\frac{(49)^2\cdot(24)^6.(5\cdot3^2 2^3)^3}{(42)^2\cdot(2^4.3^2\cdot7)^3}$$

2. $$\left(\frac{3a^2x^3y^4}{4a^3b^2x^2y}\right)^3 \times \left(\frac{2a^3by^3z^2}{3^2a^2x^4y^5}\right)^2$$

3. $$\frac{(a^x)^x \times (a^y)^y}{(a^x)^y \times (a^z)^x} \div \left(\frac{a^z}{a^xa^y}\right)^z$$

4. $$\left(\frac{a^2-b^2}{x-y}\right)^z \left(\frac{x^2-y^2}{a+b}\right)^3 \div \left(\frac{y^2-x^2}{a+b}\right)^3$$

5. $$\left(\frac{3a^2x^3y^z}{2x^4y^2}\right)^2 \div \left(\frac{2a^2x^4y^2}{3a^5x^2z^2}\right)^3 \times \left(\frac{10x^3y^2z^4}{3x^2y^2z}\right)^2$$

3·2 ಭಿನ್ನರಾಶೀಯ ಮತ್ತು ಋಣಘಾತಾಂಕಗಳು

ಇದುವರೆಗೆ m ಎಂಬುದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು a^m ನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿದ್ದೆವು. ಆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಸ್ತರಣ ಪ್ರಕೃತಿಗೆ ತಕ್ಕಹಾಗೆ, a^m ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗೆ, ಘಾತಾಂಕವಾದ m ಎಂಬುದು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೂ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಅರ್ಥವೊಂದನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ,

ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೂಲನಿಯಮವಾದ

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}} \qquad ....(3\cdot1')$$

ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ Q ಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲ್ಲಾ m ಮತ್ತು nಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ

$a \in R$, p, q, $n \in N$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a^{p/q}$, a°, ಮತ್ತು a^{-n} ಎಂಬವುಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಅರ್ಥವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

I <u>To find a meaning for $a^{p/q}$ where $p, q \in N$.</u>

Since $a^m \times a^n = a^{m+n}$ for all values of m and n,

$a^{p/q} \times a^{p/q} = a^{p/q + p/q}$ i.e. $\left(a^{p/q}\right)^2 = a^{2p/q}$

Thus $\left(a^{p/q}\right)^q = \left(a^{p/q} \times a^{p/q} \times a^{p/q} \times \ldots\right)$ to q factors.

$= a^{p/q + p/q + p/q + \ldots}$ to q terms

$\therefore \left(a^{p/q}\right) = a^{p/q \times q} = a^p$

Taking qth roots on both sides, $\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}}$ . . .(3.4)

In particular, for $p = 1$, $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$

Thus $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ etc.

II <u>To find a meaning for a^0</u>.

We have $a^m \times a^n = a^{m+n}$ for all values of $m, n \in Q$.

Let $n = 0$ $\therefore$ $a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$. Let $a \neq 0$, $\therefore a^m \neq 0$

Dividing by a^m on both sides,

$$a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Thus for all $0 \neq a \in R$, $\boxed{a^0 = 1}$ . . . . (3.5)

I $p, q \in N$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a^{p/q}$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವಿವರಣೆ

m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{p}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}}, \text{ ಎಂದರೆ } \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^2 = a^{\frac{2p}{q}}$$

ಹೀಗೆ, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \ldots\ldots\ldots\right)$ q ಅಪವರ್ತನಗಳವರೆಗೆ

$$= a^{\frac{p}{p}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots} \quad q \text{ ಪದಗಳವರೆಗೆ}$$

$$\therefore \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}\times q} = a^p.$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ qನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\boxed{a^{\frac{p}{}} = \sqrt[p]{a^p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\cdot4)$$

$p=1$ ಎಂಬ ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

ಹೀಗೆ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

II a° ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆ

$m, n \in Q$ ಆದರೆ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ಆಗುತ್ತದೆ

ಇಲ್ಲಿ $n = o$ ಆಗಲಿ. ಆಗ $a^m \times a^\circ = a^{m+\circ} = a^m$. $\therefore a \neq o$ ಇದ್ದರೆ, $a^m \neq o$. ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ a^m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$a^\circ = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

ಹೀಗೆ $a \in R$, $(a \neq 0)$ ಆಗುವ ಎಲ್ಲಾ a ಗಳಿಗೂ, $\boxed{a^\circ = 1}$ . . . . (3.5)

III To find a meaning for a^{-m}.

We have $a^m \times a^n = a^{m+n}$ for all $a \in R$, $(a \neq o)$ and $m, n \in Q$.

Taking $n = -m$,

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

Here $a^m \neq 0$ Dividing both sides by a^m, we get,

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \qquad \text{.......................................} (3{\cdot}6)$$

Thus, $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$; $x^{-2/3} = \dfrac{1}{x^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Hence, a factor may be transferred from the numerator to the denominator, and *vice versa*, by changing the sign of its index.

3·3 Laws of Indices for fractional and Negative values.

We have assumed that the 1st law

(1) $a^m . a^n = a^{m+n}$ holds for all rational values of m and n. On the basis of this, and the meanings of $a^{p/q}$, a^0 and a^{-m} as given in equations (3.4), (3.5) and (3·6) we shall prove the other two laws :

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

and (3) $(ab)^m = a^m b^m$

for all rational values of the indices m, n.

A. The Second Law

(1). To prove the 2nd law $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

for $m = \dfrac{p}{q}$ and $n = \dfrac{r}{s}$ where $p, q, r, s \in N$

III a^{-m} ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವಿಕೆ.

$0 \neq a \in R$ ಆಗುವ ಎಲ್ಲಾ a ಗಳಿಗೂ, $m, n \in Q$ ಆದರೆ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ಎಂದಿದೆಯಷ್ಟೆ.

$n = -m$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

ಇಲ್ಲಿ $a^m \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ a^m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \quad \text{.......................................} (3.6)$$

ಹೀಗೆ, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $x^{-2/3} = \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಅಂಶದಿಂದ ಛೇದಕ್ಕೂ ಛೇದದಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೂ, ಅದರ ಘಾತದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ, ವರ್ಗಾಯಿಸಬಹುದು.

3.3 ಭಿನ್ನರಾಶೀಯ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

ಮೊದಲನೆಯ ನಿಯಮದಿಂದ

(1) $a^m . a^n = a^{m+n}$ ಎಂಬುದು m, n ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು $a^{p/q}$, a^0, ಮತ್ತು a^{-m} ಗಳಿಗೆ (3·4), (3·5) ಮತ್ತು (3·6) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕೊಡುತ್ತಿರುವ ಅರ್ಥವಿವರಣೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, m n ಘಾತಾಂಕಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ,

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

ಮತ್ತು (3) $(ab)^m = a^m b^m$

ಎಂಬ ಇನ್ನೆರಡು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

A ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮ.

(1). $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$, $p, q, r, s \in N$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮವಾದ $(x^m)^n = x^{mn}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ.

Now $x^m = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ by (3.4)

$$\therefore \left(x^m \right)^r = \left(\sqrt[q]{x^p} \right)^r$$

$$\therefore \left[\left(x^m \right)^r \right]^q = \left[\left(\sqrt[q]{x^p} \right)^r \right]^q = \left(\sqrt[q]{x^p} \right)^{rq} \text{ by (3.2)},$$

$$= \left(\sqrt[q]{x^p} \right)^{qr} = \left[\left(\sqrt[q]{x^p} \right)^q \right]^r \text{ by (3.2)},$$

$$= [x^p]^r \text{ by definition},$$

$$= x^{pr} \text{ by (3.2)}$$

Taking qth roots on both sides,

$$[x^m]^r = \sqrt[q]{x^{pr}} = x^{\frac{pr}{q}} \text{ by (3.4)}$$

Taking sth roots on both sides,

$$\sqrt[s]{[x^m]^r} = \sqrt[s]{x^{\frac{pr}{q}}}$$

$$\therefore [x^m]^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{pr}{qs}} \text{ by (3.4)}$$

$$\therefore \boxed{\left(x^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}}} \quad (3{\cdot}2')$$

(2) To prove that $(x^m)^n = x^{mn}$ where m or n or both are negative rational numbers.

Case (1) Let $m<o$, $n>o$. Put $m = -m'$, where $m'>o$

$$\therefore x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}} \text{ by (3.6)}$$

ಈಗ $x^m = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ (3·4)ರಿಂದ,

$$\therefore \left(x^m\right)^r = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^r$$

$$\therefore \left[(x^m)^r\right]^q = \left[\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^r\right]^q = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{rq} \text{ (3·2)ರಿಂದ,}$$

$$= \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{qr} = \left[\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q\right]^r \text{ (3·2)ರಿಂದ,}$$

$$= \left[\ x^p\ \right]^r \text{ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ,}$$

$$= x^{pr} \text{ (3·2)ರಿಂದ.}$$

q ನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$[x^m]^r = \sqrt[q]{x^{pr}} = x^{\frac{pr}{q}} \ldots \text{ (3·4) ರಿಂದ,}$$

ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ sನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ.

$$\sqrt[s]{[x^m]^r} = \sqrt[s]{x^{\frac{pr}{q}}}$$

$$\therefore \quad [x^m]^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{pr}{qs}} \text{. (3.4) ರಿಂದ}$$

$$\therefore \quad \boxed{\left[x^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}}} \quad \ldots, \text{ (3·2')}$$

(2) m ಅಥವಾ n ಅಥವಾ ಇವೆರಡೂ ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $(x^m)^n = x^{mn}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವಿಕೆ.

1ನೆಯ ಸಂದರ್ಭ : $m<0, n>0$ ಆಗಿರಲಿ. $m = -m'$ ಎಂದಿಟ್ಟರೆ $m'>0$.

$$\therefore x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}} \quad \text{(3·6) ರಿಂದ.}$$

$$\therefore\ (x^m)^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^n = \frac{1^n}{(x^{m^1})^n} \ldots\ldots\ \text{by } (3\cdot 3a)$$

$$= \frac{1}{x^{m'n}} \text{ by } (3\cdot 2),$$

$$= x^{-m'n} \text{ by } (3\cdot 6),$$

$$= x^{-(m')n} \text{ by convention of signs.}$$

$$\therefore\quad \underline{(x^m)^n = x^{mn}}$$

Case (2) The case where $m>0$, $n<0$, can easily b proved in a similar manner, and it is left as an exercis to the student.

Case (3) Let $m<o$, $n<o$, Put $m=-m'$, $n=-n$ We have $m'>o$, $n'>o$.

$$\therefore\quad x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}} \ldots\ldots \text{ by } (3.6)$$

$$\therefore\quad [x^m]^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{(x^{m'})^{-n'}}$$

$$\ldots\ldots \text{ by } (3.3a$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(x^{m'})^{n'}}} \ldots\ldots \text{ by } (3.6)$$

$\therefore\ (x^m)^n = x^{m'\ n'} = x\,(-^m)\,(-^n) = x^{mn}$ by the conven tion of signs.

This proves the 2nd law for all rational indices.

B. The Third Law

(1) To prove the 3rd law $(xy)^m = x^m\, y^m$ when $m=\frac{p}{q}$ where $p,q \in N$

$\therefore (x^m)^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^n = \frac{1^n}{(x^{m1})^n}$ (3.3a) ಯಿಂದ.

$= \frac{1}{x^{m'n}}$ (3.2) ರಿಂದ.

$= x^{-m'n}$ (3.6) ರಿಂದ.

$= x^{(-m1)^n}$ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಒಪ್ಪಂದದಿಂದ.

$\therefore (x^m)^n = x^{mn}$

2ನೆಯ ಸಂದರ್ಭ: $m>0$, $n<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ, ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅಭ್ಯಾಸದಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

3ನೆಯ ಸಂದರ್ಭ:—$m<0$, $n<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $m=-m'$, $n=-n'$ ಎಂದು ಇಡೋಣ. ಈಗ $m'>0$, $n'>0$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}}$ (3.6) ರಿಂದ

$\therefore \left[x^m\right]^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^n = \left(\frac{1}{x^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{(x^{m'})^{-n'}}$....(3.3a)ಯಿಂದ,

$= \frac{1}{\frac{1}{(x^{m'})^{n'}}}$ (3.6) ರಿಂದ.

$\therefore \quad (x^m)^n = x^{m'n'} = x^{(-m)(-n)} = x^{mn}$ (ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಒಪ್ಪಂದದಿಂದ) ಇಲ್ಲಿಗೆ, ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಘಾತಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸಾಧಿಸಿಯಾಯಿತು.

<u>*B* ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮ</u>

(1) $m = \frac{p}{q}$, $p, q \in N$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(xy)^m = x^m \cdot y^m$ ಎಂಬ ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ.

Now $\left(x^{\frac{p}{q}}.\ y^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left[\left\{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q.\ \left(y^{\frac{p}{q}}\right)^q\right\} \ldots \text{ to}\right.$

q factors $\Big]\Big($by (3 . 3)$\Big)$

$$= x^p.\ y^p \ldots \text{by } (3{\cdot}2')$$

$$= (xy)^p \ldots\ldots \text{by } (3{\cdot}3)$$

Taking q th roots on both sides,

$$x^{\frac{p}{q}}\ y^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(xy)^p} = (xy)^{\frac{p}{q}} \quad \ldots\ldots \text{by } (3.4)$$

$$\therefore \boxed{x^{\frac{p}{q}}\ y^{\frac{p}{q}} = xy)^{\frac{p}{q}}} \quad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

(2) To prove the 3rd law $(xy)^m = x^m \cdot y^m$ when $m < o$.

Put $m = -m'$; here $m' > o$.

$$\therefore\ (xy)^m = (xy)^{-m'} = \frac{1}{(xy)^{m'}} . \text{by } (3{\cdot}6)$$

$$= \frac{1}{x^{m'} y^{m'}} . \text{by } (3{\cdot}3')$$

$$= x^{-m'} y^{-m'} . \text{by } (3{\cdot}6)$$

$$= x^m y^m$$

$$\therefore \boxed{(xy)^m = x^m y^m}$$

This proves the 3rd law for all rational indices.

ಈಗ $\left(x^{\frac{p}{q}} \cdot y^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left\{ \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q \cdot \left(y^{\frac{p}{q}}\right)^q \ldots q$ ಅಪವರ್ತನ

ಆವರೆಗೆ $\}$ ....(3·3) ರಿಂದ,

$= x^p \cdot y^p$ ....(3 · 2′) ರಿಂದ.

$= (xy)^p$ ....(3 · 3) ರಿಂದ.

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ q ನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x^{\frac{p}{q}} \cdot y^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(xy)^p} = \left(xy\right)^{\frac{p}{q}} \text{ ....(3·4)ರಿಂದ.}$$

$$\therefore \boxed{x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p}{q}} = (xy)^{\frac{p}{q}}} \text{ ....(3 · 3′)}$$

(2) $m < o$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, $(xy)^m = x^m y^m$ ಎಂಬ ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ,

$m = -m'$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $m' > o$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad (xy)^m = (xy)^{-m'} = \frac{1}{(xy)^{m'}}$ ....(3·6)ರಿಂದ,

$= \frac{1}{x^{m'} y^{m'}}$ ....(3·3′)ರಿಂದ,

$= x^{-m'} y^{-m'}$ ....(3·6)ರಿಂದ,

$= x^m y^m.$

$$\therefore \boxed{(xy)^m = x^m y^m}$$

ಇಲ್ಲಿಗೆ, ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಘಾತಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸಾಧಿಸಿಯಾಯಿತು.

Examples

(1) Simplify $\dfrac{(3ab^{\frac{1}{2}}c)^2}{b^7c^{\frac{3}{2}}} \times \sqrt{a^{-\frac{5}{2}}b^3c^{-\frac{2}{3}}} \div (a^{-4}b^{-2}c^{-1})$

The Expression

$$= \frac{3^2a^2b^{\frac{2}{2}}c^2}{b^7\ c^{\frac{3}{2}}} \times \left(a^{-\frac{5}{2}}\,b^3\ c^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{a^{-\frac{4}{6}}\,b^{-\frac{2}{6}}\,c^{-\frac{1}{6}}}$$

$$= 9a^2bc^2b^{-7}c^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{5}{4}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}}.\ a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}$$

$$= 9a^{2-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}}\ b^{1-7+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}\ c^{2-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$= 9a^{\frac{17}{12}}b^{-\frac{25}{6}}\ c^{\frac{1}{3}}$$

(2) Simplify .— $\dfrac{2^{(2^3)} - (2^2)^3}{(3^{2^\circ}) - (3^{2^\circ})} \times \dfrac{2^{1.183}}{8^{3.061}}$

The expression $= \dfrac{2^8-4^3}{9^0-3^1} \times \dfrac{2^{1.183}}{(2^3)^{3.061}}$

$$= \frac{2^8-(2^2)^3}{1-3} \times \frac{2^{1.183}}{2^{9.183}}$$

$$= \frac{2^8-2^6}{-2} \times \frac{1}{2^{9.183-1.83}}$$

$$= \frac{2^6(2^2-1)}{-2} \times \frac{1}{2^8} = -\frac{2^6}{2^9} \times (4-1)$$

1. ಇದನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ :—

$$\frac{(3ab^{\frac{1}{2}}c)^2}{b^{7}c^{\frac{3}{2}}}\times\sqrt{a^{-\frac{5}{2}}b^{3}c^{-\frac{2}{3}}}\div\left(a^{-4}b^{-2}c^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

ತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯ $=\dfrac{3^2a^2b^{\frac{2}{2}}c^2}{b^7c^{\frac{3}{2}}}\times\left(a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{a^{-\frac{4}{6}}b^{-\frac{2}{6}}c^{-\frac{1}{6}}}$

$$=9a^2bc^2b^{-7}c^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{5}{4}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}$$

$$=9a^{2-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}}\qquad b^{1-7+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}\qquad c^{2-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$=9a^{\frac{17}{12}}b^{-\frac{25}{6}}c^{\frac{1}{3}}$$

2. ಇದನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ:—

$$\frac{2^{\left(2^{3}\right)}-\left(2^{2}\right)^{3}}{\left(3^{2}\right)^{\circ}-\left(3^{2^{\circ}}\right)}\times\frac{2^{1.183}}{8^{3.061}}$$

the expression $=\dfrac{2^8-4^3}{9^{\circ}-3^1}\times\dfrac{2^{1.183}}{(2^3)^{3.061}}$

$$=\frac{2^8-(2^2)^3}{1-3}\times\frac{2^{1\cdot183}}{2^{9\cdot183}}$$

$$=\frac{2^8-2^6}{-\ 2}\times\frac{1}{2^{9.183-1.183}}$$

$$=\frac{2^6(2^2-1)}{-2}\times\frac{1}{2^8}$$

$$=-\frac{2^6}{2^9}\times(4-1)$$

$$=-\frac{1}{2^3}\times3=\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^3} \times 3 = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

Exercises 3.2

I Evaluate :

(1) $2x^2 \times 5x^{-\frac{2}{3}}$

(2) $x^{-2}y^{-\frac{1}{3}} \div x^{-5}$

(3) $(100)^{\frac{5}{2}}, (125)^{\frac{2}{3}}, (81)^{-\frac{3}{4}}$

(4) $\left(a^{\frac{3}{2}}\, b^{-1\frac{3}{4}}\right)^7$

(5) $\sqrt[3]{\left(a^3 y^6 z^{\frac{12}{7}}\right)}$

(6) $\dfrac{2^{n+4} - 6\cdot 2^{n+1}}{2^{n+3} \times 7^2}$

II Simplify the following :—

(1) $\sqrt[5]{a^3b^{-2}c^4} \times \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c^{-4}}$

(2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}\quad x^{-\frac{1}{9}}}{b^{-\frac{1}{3}}\quad c^{\frac{2}{9}}}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}\ x^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}\ c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(3) $\dfrac{3+3^{-1}}{5} + (-4)^0 - \left(\dfrac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(4) $\dfrac{2^{n-1}.4^{-4n}.\ 8^{n+1}}{2^{-(3n+1)}} \times \dfrac{2^n(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\ 2^{n-1}}$

(5) $\{3^{n+1} \times 3^n + 2\,(3^2)^n - 2.9^n\} \div \sqrt{9^n}.$

(6) $\sqrt{\left(a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}\right)} \div \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3·2

I ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:—

(i) $2x^2 \times 5x^{-\frac{2}{3}}$.

(ii) $x^{-2}\, y^{-\frac{1}{3}} \div x^{-5}$.

(iii) $(100)^{\frac{5}{2}}, (125)^{\frac{2}{3}}, (81)^{-\frac{3}{4}}$.

(iv) $(a^{\frac{2}{3}}\; b^{-\frac{3}{14}})^7$.

(v) $\sqrt[3]{(a^3\, y^6\, z^{\frac{12}{7}})^{\frac{1}{3}}}$

(vi) $\dfrac{2^{n+4} - 6\cdot 2^{n+1}}{2^{n+3} \times 7^2}$

II ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

(1) $\sqrt[5]{a^3 b^{-2} c^4} \times \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}} c^{-4}}$

(2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{9}}}{b^{-\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{9}}}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(3) $\dfrac{3+3^{-1}}{5} + (-4)^{0} - \left(\dfrac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(4) $\dfrac{2^{n-1}.\ 4^{-4n}.\ 8^{n+1}}{2^{-(3n+1)}} \times \dfrac{2^n(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\ 2^{n-1}}$.

(5) $\{3^{n+1} \times 3^n + 2(3^2)^n - 2.9^n\} \div \sqrt{9^n}$

(6) $\sqrt{(a^{-\frac{5}{3}} b^3 c^{-\frac{2}{3}})} \div \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}} b^4 c^{-1}}$

III Evaluate :

(1) $(2^{x}-2^{-x})^2$

(2) $(a^{\frac{1}{4}}+\sqrt{b^3})^2$

(3) $\sqrt{25x-40x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+16y^{\frac{2}{3}}}$

(4) $\left\{x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\right\} \div \left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right)$

(5) $\left\{x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}\right\} \div (x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$

IV (1) If $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}=o$, show that $(a+b+c)^3=27abc$.

(2) If $xyz=1$, show that $\sum\left(1+x+y^{-1}\right)^{-1}=1$.

(3) If $a^x=b^y=c^z$, and $b^2=ac$, prove that $y=\dfrac{2zx}{z+x}$.

(4) If $a=b^c$, $b=c^a$, $c=a^b$, prove that $abc=1$.

(5) Show that $\sum\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}=1$.

(6) If $x=2+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$, prove that $x^3-6x^2+6x-2=0$.

(7) Show that

$$\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}=1.$$

(8) Show that

$$\left(\frac{b+c}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(\frac{c+a}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(\frac{a+b}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}=1$$

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $(2^x-2^{-x})^2$ (2) $(a^{\frac{1}{4}}+\sqrt{b^3})^2$

(3) $\sqrt{25x-40x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+16y^{\frac{2}{3}}}$

(4) $\{x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\}\div\{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\}$.

(5) $\{x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}\}\div\{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\}$,

IV (1) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}=0$ ಆದರೆ, $(a+b+c)^3=27\ abc$ ಎಂದು ರಿಸಿ.

(2) $x\,y\,z=1$ ಆದರೆ, $\Sigma\ (1+x+y^{-1})^{-1}=1$ ಎಂದು ರಿಸಿ.

(3) $a^x=b^y=c^z$, ಮತ್ತು $b^2=ac$ ಆದರೆ, $y=\dfrac{2zx}{z+x}$ ಎಂದು ರಿಸಿ.

(4) $a=b^c$, $b=c^a$, $c=a^b$ ಆದರೆ, $abc=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(5) $\sum \dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(6) $x=2+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ ಆದರೆ, $x^3-6x^2+6x-2=0$ ಎಂದು ರಿಸಿ.

(7) $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2\,b^2-a^{-2}\,b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})\,(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}\,b^{-1}}=1$ ಎಂದು ರಿಸಿ.

(8) $\left(X^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(X^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(X^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}=1$ ದು ತೋರಿಸಿ.

(9) Show that

$$\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2.$$

(10) If $x=y^a$, $y=z^b$, $z=x^c$, show that $abc=1$.

3.4 SURDS

Definition :—If the nth root, $\sqrt[n]{a}$ of a ration[al] number a is irrational, then $\sqrt[n]{a}$ is called a surd or su[rd] number of order n.

e. g. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[5]{20}$ etc. are all surds.

Here $\sqrt{2}$ is a quadratic surd,

$\sqrt[3]{2}$ is a cubic surd,

$\sqrt[4]{5}$ is a quartic surd,

$\sqrt[5]{11}$ is a surd of the 5th order, and so on.

Two surds of the same order are called *like s*[urds] or *similar surds* if their quotient is rational; other[wise] they are called *unlike* surds or dissimilar surds.

e.g. (1) $\sqrt{2}$ and $\sqrt{8}$ are like surds,

for $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{2}}$

(9) $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2$
ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(10) $x=y^a$, $y=z^b$, $z=x^c$, ಆದರೆ $abc=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3·4 ಕರಣಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :— a ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ nನೆಯ ಮೂಲವಾದ $\sqrt[n]{a}$ ಎಂಬುದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಲ್ಲಿ, $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು nನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[5]{20}$, ಇತ್ಯಾದಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಕರಣಿಗಳೇ.

ಇಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$, ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ

$\sqrt[3]{2}$, ತೃತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ

$\sqrt[4]{5}$, ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ

$\sqrt[5]{11}$ ಎಂಬುದು ಪಂಚಮ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳೆರಡರ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ; ಹಾಗಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅವನ್ನು ಅಸಮಾನ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ. (1) $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt{8}$ ಗಳು ಸಮಾನ ಕರಣಿಗಳು.

ಏಕೆಂದರೆ, $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{2}}$

Now we use the law $\sqrt[n]{xy} = (xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$

and write $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$ which is rational.

(2) $\sqrt{8}$ and $\sqrt{50}$ are like surds, for $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2\times 25}}{\sqrt{2\times 4}}$

$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$ which is rational.

(3) $\sqrt{7}$ and $\sqrt{12}$ are unlike surds, for $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3\times 4}}{\sqrt{7}}$

$= \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ where 3 & 7 are not perfect Squares.

$\therefore\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$ is irrational.

We notice that similar surds are such as when reduced to their simplest forms, contain the same surd or surds as common factors.

Ex. (1) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ and all these contain the same surd $\sqrt{2}$ as a common factor. These are all similar.

(2) $\sqrt{150} = 5\sqrt{2}\sqrt{3}$ and $\sqrt{600} = 10\sqrt{2}\sqrt{3}$ contain $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$ as common factors. These two are similar.

In simplifying surds, we begin by writing each surd in its simplest form, as shown in the following examples.

Example (1) Reduce the following expression to its simplest form. $4\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - \sqrt{45}$

$$= 4\sqrt{5} + 6\sqrt{4\times 5} - \sqrt{5\times 9}$$
$$= 4\sqrt{5} + 6\sqrt{4}\ \sqrt{5} - \sqrt{5}\ \sqrt{9}$$
$$= 4\sqrt{5} + 6\times 2\times\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$
$$= (4+12-3)\sqrt{5} \qquad = 13\sqrt{5}$$

ಈಗ $\sqrt[n]{xy} = (xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

(2) $\sqrt{8}$ ಮತ್ತು $\sqrt{50}$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನಕರಣಿಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2\times 25}}{\sqrt{2\times 4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$. ಇದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

(3) $\sqrt{7}$ ಮತ್ತು $\sqrt{12}$ ಅಸಮಾನ ಕರಣಿಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3\times 4}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. ಇಲ್ಲಿ 3 ಮತ್ತು 7 ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲ. $\therefore \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಮಾನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕರಣಿ ಅಥವಾ ಕರಣಿಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆ:— $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನಕರಣಿಗಳು.

(2) $\sqrt{150}=5\sqrt{2}\sqrt{3}$, ಮತ್ತು $\sqrt{600}=10\sqrt{2}\sqrt{3}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಇವು ಸಮಾನಕರಣಿಗಳು.

ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು, ಪ್ರತಿ ಕರಣಿಯನ್ನೂ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರ್ಪಡಿಸಿರುವಂತೆ ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ ;—(1) ಮುಂದಿನ ಬೀಜವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$4\sqrt{5}+6\sqrt{20}-\sqrt{45}$$
$$=4\sqrt{5}+6\sqrt{4\times 5}-\sqrt{5\times 9}$$
$$=4\sqrt{5}+6\sqrt{4}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{9}$$
$$=4\sqrt{5}+6\times 2\times\sqrt{5}-3\sqrt{5}$$
$$=(4+12-3)\sqrt{5}=13\sqrt{5}$$

Example (2) Reduce the following expression to its simplest form.

$$\sqrt[3]{27x^4} - \sqrt[3]{125x} + 3\sqrt[3]{8x^4}$$

The expression $= (27x^4)^{\frac{1}{3}} - (125x)^{\frac{1}{3}} + 3\,(8x^4)^{\frac{1}{3}}$

$= 3.x.x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 3.2.x.x^{\frac{1}{3}}$

$= (3x-5+6x)\,x^{\frac{1}{3}} = (9x-5)\sqrt[3]{x}$

Surds of different orders may be reduced to surds of the same order, as follows:

Given the surds—

$\sqrt[m]{a}$ and $\sqrt[n]{b}$, we write them as

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n} \quad \&$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{mn}} = \sqrt[mn]{b^m}.$$

This reduction helps us to find out the order relation between

$\sqrt[m]{a}$ and $\sqrt[n]{b}$ Thus $\sqrt[m]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$

according as $\sqrt[mn]{a^n} \gtreqless \sqrt[mn]{b^m}$ i.e., according as

$$a^n \gtreqless b^m$$

ಉದಾಹರಣೆ ;—(2) ಮುಂದಿನ ಬೀಜವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :—

$$\sqrt[3]{27x^4} - \sqrt[3]{125x} + 3\sqrt[3]{8x^4}$$

ಬೀಜವಾಕ್ಯ $= (27x^4)^{\frac{1}{3}} - (125x)^{\frac{1}{3}} + 3(8x^4)^{\frac{1}{3}}$

$= 3 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}}$

$= (3x - 5 + 6x)x^{\frac{1}{3}}$

$= (9x - 5)\sqrt[3]{x}$

ವಿವಿಧ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

$\sqrt[m]{a}$ ಮತ್ತು $\sqrt[n]{b}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n}$$

ಮತ್ತು $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{nm}} = b^{\frac{m}{mn}} = \sqrt[mn]{b^m}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\sqrt[m]{a}$ ಮತ್ತು $\sqrt[n]{b}$ ಗಳಿಗಿರುವ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ,

$$a^n \gtreqless b^m$$

ಆದರೆ, $\sqrt[mn]{a^n} \gtreqless \sqrt[mn]{b^m}$

ಎಂದರೆ, $\sqrt[m]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

e.g. (1) Compare the surds :

$$\sqrt[3]{5} \text{ and } \sqrt[4]{6}$$

Expressing them as surds of the same order, we hav

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

$$\& \quad \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

Now $625 > 216$

$$\therefore \sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{216}$$

$$\therefore \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{6}.$$

(2) Arrange the following surds in the increasi order :

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5} \ \& \ \sqrt[6]{6}$$

These are respectively equal to $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{6}}$

$$= 2^{\frac{6}{12}}, 3^{\frac{4}{12}}, 5^{\frac{3}{12}}, 6^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{3^4}, \sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{}$$

$$= \sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{125}, \sqrt[12]{36}$$

This shows that $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$.

Exercises 3.3

I Reduce the following surds to their simplest for

(i) $\sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{40}$ (iii) $\sqrt{72}$

<u>ಉದಾಹರಣೆ:</u> (1) ಈ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ: $\sqrt[3]{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt[4]{6}$

ಇವುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ವ ್ರಪಡಿಸಿದರೆ,

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt{5^4} = \sqrt[1]{625}$$

ಮತ್ತು $\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$

ಈಗ (25 > 216 $\therefore \sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{216}$

$$\therefore \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{6}$$

(2) ಈ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{5} \quad \sqrt[6]{6}$$

ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ, $2^{\frac{1}{2}}, \quad 3^{\frac{1}{3}}, \quad 5^{\frac{1}{4}}, \quad 6^{\frac{1}{6}}.$

$$= 2^{\frac{6}{12}}, 3^{\frac{4}{12}}, 5^{\frac{3}{12}}, 6^{\frac{2}{12}}$$

$$= \sqrt[12]{2^6}, \quad \sqrt{3^4}, \quad \sqrt[12]{5^3}, \quad \sqrt[12]{6^2}$$

$$= \sqrt[12]{64}, \quad \sqrt[12]{81}, \quad \sqrt[12]{125}, \quad \sqrt[12]{36}$$

ಇದರಿಂದ,

$\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3.3

I ಮುಂದಿನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

(i) $\sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{40}$ (iii) $\sqrt{72}$

(iv) $\sqrt[3]{32}$ (v) $\sqrt[3]{24}$ (vi) $\sqrt[4]{162}$.

II Express the following as entire surds.

(i) $2\sqrt[3]{3}$ (ii) $3\sqrt{\frac{1}{5}}$ (iii) $7\sqrt{\frac{11}{2}}$

(iv) $2\sqrt{12}$ (v) $4\sqrt[3]{15}$

III Arrange the following sets of surds in the descending order.

(1) $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{24}$ (2) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{12}$

(3) $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{50}$ (4) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

(5) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, (6) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$

IV Reduce the following expressions to their lowest form

(1) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{147} - \sqrt{300}$

(2) $3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{72}$

(3) $\sqrt{640} + 2\sqrt{45} - \sqrt{810}$

V Prove that $3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}} > 6^{\frac{1}{6}}$

3·5 Multiplication of Surds—Rationalising factors

(1) *Simple Surds.*—

To multiply surds of different orders, we begin by reducing the surds to the same lowest order. This is followed by formal multiplication. This process is illustrated in the following examples.

Ex. Consider $2\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt[3]{12}$

$$\text{Expression} = 2\sqrt{4\times5} \times \sqrt{9\times5} \times \sqrt[3]{12}$$

$$= 2\sqrt{4}\ \sqrt{5} \times \sqrt{9}\ \sqrt{5} \times \sqrt[3]{12}$$

$$= 2\times2\times\sqrt{5}\times3\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{12}$$

$$= 60\times\sqrt[3]{12} = 60\sqrt[3]{12}$$

(iv) $\sqrt[3]{32}$ (v) $\sqrt[3]{24}$ (vi) $\sqrt[4]{162}$.

II ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ಕರಣಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

(i) $2\sqrt[3]{2}$ (ii) $3\sqrt{\frac{1}{5}}$ (iii) $7\sqrt{\frac{11}{2}}$

(iv) $2\sqrt{12}$ (v) $4\sqrt[3]{15}$.

III ಈ ಕರಣಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{24}$

(2) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{12}$

(3) $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{50}$

(4) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

(5) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$

(6) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$

IV ಮುಂದಿನ ಬೀಜ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

1. $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{147}-\sqrt{300}$

2. $3\sqrt[3]{4}-2\cdot\sqrt[3]{32}+\sqrt{108}+\sqrt[3]{72}$

3. $\sqrt{640}+2\sqrt{45}-\sqrt{810}$

V. $3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}>5^{\frac{1}{5}}>6^{\frac{1}{6}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3·5 ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ—ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು

(1) ಸಾಧಾರಣ ಕರಣಿಗಳು.—ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಕರ್ಮವು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಉದಾ: $2\sqrt{20}\times\sqrt{45}\times\sqrt[3]{12}$ ನ್ನು ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

ಬೀಜವಾಕ್ಯ $=2\sqrt{4\times5}\times\sqrt{9\times5}\times\sqrt[3]{12}$

$=2\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{9}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{12}$

$=60\times\sqrt[3]{12}=60\sqrt[3]{12}$

(2) *Compound Surds :*

A surd expression consisting of two or more terms is called a compound surd.

e.g. $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ are binomial surds.
$1-\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{14}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{11}$ are trinomia

surds.

Multiplication of compound surds is carried out a in the case of ordinary binomials, trinomials, etc. Th following examples illustrate the process.

(1) Multiply $(\sqrt{27}-\sqrt{50})$ by $(\sqrt{48}-2\sqrt{72})$.

We begin by expressing the surds, using the prope indices.

$$\begin{aligned} \text{The product} &= [(27^{\frac{1}{2}}-(50)^{\frac{1}{2}}]\times[(48)^{\frac{1}{2}}-2(72)^{\frac{1}{2}}] \\ &= (3^{\frac{1}{2}}\cdot 3-2^{\frac{1}{2}}\cdot 5)\times(3^{\frac{1}{2}}\cdot 4-2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 6) \\ &= (3^{\frac{1}{2}}\cdot 3-2^{\frac{1}{2}}\cdot 5)\times(3^{\frac{1}{2}}\cdot 4-12\cdot 2^{\frac{1}{2}}) \\ &= 3\cdot 12-20\cdot 6^{\frac{1}{2}}-36\cdot 6^{\frac{1}{2}}+60\cdot 2 \\ &= 36-56\sqrt{6}+120 \\ &= 156-56\sqrt{6} \end{aligned}$$

Ex. (2) Multiply $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}\right)$ by $\left(x-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt{y}\right.$

$$\begin{aligned} \text{The product} &= (x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}})(x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}) \\ &= x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{4}}-xy^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}. \\ &= x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$=\sqrt{x^3}+\sqrt[4]{y^3}=x\sqrt{x}+\sqrt[4]{y^3}.$$

(2) <u>ಸಂಯೋಜಿತ ಕರಣಿಗಳು</u>:—ಎರಡು ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ಸಂಯೋಜಿತ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ: $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ಇವು ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳು.

$1-\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{14}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{11}$ ಇವು ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಗಳು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ದ್ವಿಪದ, ತ್ರಿಪದಗಳಂತೆಯೇ ಸಂಯೋಜಿತ ಕರಣಿಗಳನ್ನೂ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: (1) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{50}\right)$ ಯನ್ನು $\left(\sqrt{48}-2\sqrt{72}\right)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಮೊದಲು ಕರಣಿಗಳನ್ನು ತಕ್ಕ ಘಾತಾಂಕಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಗುಣಲಬ್ಧ} = \left[(27)^{\frac{1}{2}}-(50)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left[(48)^{\frac{1}{2}}-2\ (72)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\left[3^{\frac{1}{2}}\cdot 3-2^{\frac{1}{2}}\cdot 5\right]\times\left[3^{\frac{1}{2}}\cdot 4-2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 6\right]$$

$$=\left[3^{\frac{1}{2}}\cdot 3-2^{\frac{1}{2}}\cdot 5\right]\times\left[3^{\frac{1}{2}}\cdot 4-12\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=3\times 12-20\times 6^{\frac{1}{2}}-36\times 6^{\frac{1}{2}}+60\times 2$$

$$=36-56\sqrt{6}\times 120$$

$$=156-56\sqrt{6}$$

ಉದಾ: (2) $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}\right)$ ಯನ್ನು $\left(x-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt{y}\right)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\text{ಗುಣಲಬ್ಧ} = \left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{4}}-xy^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{4}}$$

$$=\sqrt{x^3}+\sqrt[4]{y^3}=x\sqrt{x}+\sqrt[4]{y^3}$$

Rationalising factors.—When the product of two surds is a rational number, each is called a rationalising factor of the other

e.g. (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

$\therefore$ $\sqrt{2}$ and $\sqrt{8}$ are rationalising factors o each other.

Note:— $\sqrt{2}$ has $\sqrt{2}$ itself as a rationalising facto for $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. In fact all numbers of the form, $a\sqrt{}$ and $b\sqrt{2}$, where a and b are rational, will be rationalisi factors of each other.

(2) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-$ which is rational. Thus $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ and $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ a rationalising factors of each other. Such binom quadratic surds as $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ and $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ are cal conjugate surds. Thus we find that "in a pair of con gate quadratic binomial surds each is the rationalis factor of the other."

The use of rationalising factors in simplify fractions with surd denominators is of vital import and is illustrated in the following examples.

(1) Consider the fraction $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Here the den nator $\sqrt{2}$ is an irrational number, whose decima pansion is $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142136 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು :—ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಇನ್ನೊಂದರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಹೇಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :—(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

$\therefore \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt{8}$ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ಗಮನಿಸಿ :—$\sqrt{2}$ ಗೆ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ, ಏಕೆಂದರೆ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, a ಮತ್ತು bಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಲಿ, ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:—(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-b$. ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗಿರುವುದರಿಂದ, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ಮತ್ತು $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಬಗೆಯ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ ಅನುವರ್ತ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಹೀಗೆ, ''ಅನುವರ್ತ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ'' ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಕರಣಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಛೇದಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವಾಗ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುದು ; ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉದಾ: (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕುರಿತು ವಿಚಾರಿಸೋಣ

ಇಲ್ಲಿ ಛೇದವು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ; ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ನಿರೂಪಣೆಯು $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142136$..................

To avoid division by such a number, we multiply the numerator and the denominator by $\sqrt{2}$, getting the fraction

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2.4495}{2} \ldots$$

$= 1.2247 \ldots = 1.225$ (to 3 places of decimals)

To evaluate

(2) $$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{9-5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(3) Express with rational denominators:

$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ Multiplying the numerator and the denominator, by the rationalising factor of the denominator, we have,

the given expression $= \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{(x-1)})}$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}$$

$$= \frac{(x+1)+(x-1)-2\sqrt{x^2-1}}{(x+1)-(x-1)}$$

$$= \frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$= \left\{ x-\sqrt{x^2-1}. \right\}$$

ಈ ತೆರನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದಾದರೂ ಹೇಗೆ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಭಿನ್ನ
ಯ ಅಂಶವನ್ನೂ ಛೇದವನ್ನೂ $\sqrt{2}$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{2\cdot4495....}{2}$

$=1.2247............$

$=1.225$ (3 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ.)

ದಾ : (2) $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ,

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{9-5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

ದಾ : (3) ಇದನ್ನು ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ :

$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ ಇದರ ಅಂಶವನ್ನೂ, ಛೇದವನ್ನೂ ಛೇದದ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

ದತ್ತ ಬೀಜವಾಕ್ಯವು $=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$$=\frac{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}$$

$$=\frac{(x+1)+(x-1)-2\sqrt{x^2-1}}{(x+1)-(x-1)}$$

$$=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$=\left\{x-\sqrt{x^2-1}\right\}$$

Ex. (4) Simplify: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{}}$

We rationalise the denominator of each of th fractions. Thus,

the expression $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{}}{\sqrt{5}+\sqrt{}}\right.$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$=0$$

Rationalisation of the Trinomial $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

First we rationalise w.r.t. one of the variables, sa This is done by multiplying

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \text{ by } (\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$$

Now $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-$$

$$=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$=(x+y-z)+$$

ಉದಾ.—(4). ಇದನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :—

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದವನ್ನೂ ವಿಕರಣ ಗೊಳಿಸಿದರೆ, ದತ್ತಬೀಜವಾಕ್ಯ

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)$$

$$-\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}-\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$=0.$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ಎಂಬ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಯನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸುವಿಕೆ.

ಮೊದಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಚಲನಾಂಕದಲ್ಲಿ (z ಆಗಲಿ) ವಿಕರಣ ೊಳಿಸೋಣ.

ಹೇಗೆಂದರೆ, ಈಗ $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$ ನ್ನು $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$ ರಿಂದ ಣಿಸಿ.

ಈಗ $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\,(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2$$

$$=x+y+2\sqrt{xy}-z$$

$$=(x+y-z)+2\sqrt{xy}$$

Next we rationalise this expression by multiplying i[t]
by means of $\{(x+y-z)-2\sqrt{xy}\}$

Now $x+y-z-2\sqrt{xy}$.

$$=(x-2\sqrt{xy}+y)-(\sqrt{z})^2$$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2$$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})\ (\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

Thus $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\ (\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\ (\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{}$
$(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{}$

$$=\{(x+y-z)+2\sqrt{xy}\}\quad\{(x+y-z)-2\sqrt{xy}\}$$

$$=(x+y-z)^2-4xy = x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx$$

which is rational.

Thus $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$, $(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{}$

and $(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})$ are such that the rationalising fact[or]
of one of them is the product of the other three.

Ex. (1) Rationalise $(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$$\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\ \{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{5}\}$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$$

$$=2+3-2\sqrt{6}-5=5-2\sqrt{6}-5=-2\sqrt{6}$$

To rationalise this, we multiply by $\sqrt{6}$, getting

$$(-2\sqrt{6})\sqrt{6}=-2\times6=-12.$$

Thus the rationalising factor $=\{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\}\ \sqrt{6}$.

ಮುಂದೆ, ಈ ಬೀಜವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅದರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾದ

$\{(x+y-z)-2\sqrt{xy}.\}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ಕರಣಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $x+y-z-2\sqrt{xy}$

$=(x-2\sqrt{xy}+y)-(\sqrt{z})^2$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-(\sqrt{z})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})\ (\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$

ಹೀಗೆ $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$
$(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})$

$=\{(x+y-z)+2\sqrt{xy}\}\{(x+y-z)-2\sqrt{xy}\}$

$=(x+y-z)^2-4xy=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx.$

ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಹೀಗೆ $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$, $(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})$ ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉಳಿದಮೂರರ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ (1) ಇದನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿ.

$(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{5}\}=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=2+3-2\sqrt{6}-5=5-2\sqrt{6}-5=-2\sqrt{6}$

ಇದನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಲು, $\sqrt{6}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ,

$(-2\sqrt{6})\sqrt{6}=-2\times 6=-12$

ಹೀಗೆ, ಬೇಕಾದ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ

$\{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\}\sqrt{6}.$

Exercises 3·4

I Evaluate:

(1) $\left(3\sqrt[3]{3}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt[3]{4}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{6}$

(2) $(2\sqrt{12}-\sqrt{8})\sqrt{18}$ ·

(3) $(3\sqrt{5}-\sqrt{28})\sqrt{35}$ ·

(4) $(3\sqrt{a}-4\sqrt{x})(\sqrt{9x}-\sqrt{4a})$ ·

(5) $(2\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$.

(6) $(\sqrt{x-1}+2)(x\sqrt{x-1}+3)$.

II. Find the simplest rationalising factor of each the following surds.

$\sqrt{32}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt[3]{9}$,

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{18}{12}}$.

III (1) Express with rational denominators, and fi their rationalising factors of each of the following surd

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\frac{3}{1-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(2) Simplify:

(1) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$

(2) $(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{}$

(3) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} - \frac{1}{a-\sqrt{b}}$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3 · 4

I ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $(3\sqrt[3]{3})^2 \cdot (2\sqrt[3]{4})^2 \cdot \sqrt[3]{6}$
2. $(2\sqrt{12}-\sqrt{8})\sqrt{18}$
3. $(3\sqrt{5}-\sqrt{28})\sqrt{35}$
4. $(3\sqrt{a}-4\sqrt{x})(\sqrt{9x}-\sqrt{4a})$
5. $(2\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$
6. $(\sqrt{x-1}+2)(x\sqrt{x-1}+3)$

II ಈ ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sqrt{32}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt[3]{9}$,

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{18}{12}}$.

III (1) ಈ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಬರೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನೂ ಗೊತ್ತುಮಾಡಿರಿ.

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\frac{3}{1-\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

(2) ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :—

(1) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$

(2) $(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$ $(x+1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

(3) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} - \frac{1}{a-\sqrt{b}}$.

IV. Express with rational denominators, and reduce to their simplest form :

(1) $$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

(3) $$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

(4) $$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

(5) $$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

(6) $$\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)}$$

V Rationalise the following trinomial surds:

(1) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$

(3) $2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (4) $1+\sqrt{5}-\sqrt{8}$

VI Simplify the following :

(1) $$\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$$

(2) $$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

IV ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ,

(1) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

(3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

(4) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

(6) $\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)}$

V ಈ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ವಿಕರಣ ಗೊಳಿಸಿರಿ:—

(1) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$

(3) $2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (4) $1+\sqrt{5}-\sqrt{8}$

VI ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:—

(1) $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$

(2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \div \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

3.6 *Independence of Surds: Extraction of Square roots.*

The basic fact that a rational number is not equal to an irrational number leads to the following theorems on quadratic surds.

Theorem 1: A quadratic surd cannot be expressed as the sum of a rational number and another quadratic surd.

Proof: Let a, x, y be rational and $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ irrational.
Then if $\sqrt{x}=a+\sqrt{y}$..........(1)
We have, on squaring both sides,

$$x = a^2 + y + 2a\sqrt{y}$$

$$\therefore \quad \sqrt{y} = \frac{x-a^2-y}{2a} \text{ which is rational.}$$

But $\sqrt{y}$ on the L. H. S. is a surd, and cannot be equal to a rational number. $\therefore$ the assumption (i) is not true.

Theorem 2: If a, b, x, y be rational, and $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ irrational, and if $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$, then $a=b$ and $x=y$.

(3) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \div \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

3·6 ಕರಣಿಗಳ ನಿರವಲಂಬನ ; ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಿಕೆ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಲ್ಲವೆಂಬ ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಮೇಲೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು,

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಯನ್ನು, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ :—a, x, y ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ ಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ.

ಆಗ, $\sqrt{x}=a+\sqrt{y}$ ಆದರೆ............................(1)

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ ವರ್ಗಿಸಿದರೆ,

$$x=a^2+y+2a\sqrt{y}$$

$\therefore \quad \sqrt{y}=\dfrac{x-a^2-y}{2a}$.(ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ) ಆದರೆ ಎಡ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ $\sqrt{y}$ ಎಂಬುದು ಕರಣಿಯಾಗಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಲ್ಲ.

$\therefore$ ಭಾವನೆ (1) ಸರಿಯಲ್ಲ.

ಪ್ರಮೇಯ 2. a, b, x, y ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ ಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಇದ್ದು, $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$ ಆದಾಗ, $a=b$ ಮತ್ತು $x=y$ ಎಂದಿರುತ್ತವೆ.

Proof.— For if $a \neq b$, let $a = b + k$.

$\therefore \quad b + k + \sqrt{x} = b + \sqrt{y}.$

$\therefore \quad k + \sqrt{x} = \sqrt{y}$

By Theorem 1, this is possible only if $k = 0$ and $x = y$. Then $a = b$.

Square Roots of Binomial Quadratic Surds:

Consider $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 5 + 2\sqrt{10} = 7 + 2\sqrt{10}$

$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = 7 + 3 - 2\sqrt{21} = 10 - 2\sqrt{21}$

These examples suggest, that if x and y are rational and $\sqrt{y}$ a surd, then the square roots of $x \pm \sqrt{y}$ are of the form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ respectively. Here one at least of $\sqrt{a}$ and $\sqrt{b}$ must be irrational, as otherwise its square would be rational. We prove now that the square root always exists in this form.

To find the square root of $x + \sqrt{y}$.

Let us put $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

$\therefore$ Squaring, $x + \sqrt{y} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

Equating rational, and irrational parts, we get,

$x = a + b$, and $\sqrt{y} = 2\sqrt{ab}.$

$\therefore \quad y^2 = 4ab.$

Now $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab.$

$= x^2 - y^2.$

$\therefore \quad a - b = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$

$a + b = x$

ಸಾಧನೆ :—ಏಕೆಂದರೆ, $a \neq b$ ಆದರೆ, $a=b+k$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad b+k+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$

$\therefore \quad k+\sqrt{x}=\sqrt{y}$

1ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $k=o$, ಮತ್ತು $x=y$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ $a=b$.

ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು.

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=2+5+2\sqrt{10}=7+2\sqrt{10}\\ (\sqrt{7}-\sqrt{3})^2=7+3-2\sqrt{21}=10-2\sqrt{21}\end{array}\right\}$$

ಎಂಬುವನ್ನು ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ. x ಮತ್ತು y ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ, $\sqrt{y}$ ಒಂದು ಕರಣಿಯಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, $x \pm \sqrt{y}$ ಗಳಿಗೆ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿರಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಬರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $\sqrt{a}$ ಮತ್ತು $\sqrt{b}$ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಕರಣಿಯಾಗಿರಬೇಕು; ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ವರ್ಗಮೂಲವು ಯಾವಾಗಲೂ ಇದೇ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x+\sqrt{y}$ ನ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ

$\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ಎಂದಿಡೋಣ,

$\therefore$ ವರ್ಗಿಸಿದರೆ, $x+\sqrt{y} = a+b+2\sqrt{ab}$.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$\therefore x=a+b$, ಮತ್ತು $\sqrt{y}=2\sqrt{ab}$

$\therefore y^2 = 4ab$.

ಈಗ, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$= x^2-y^2$.

$\therefore a-b=\pm\sqrt{x^2-y^2}$

$a+b=x$

$\therefore \quad 2a = x \pm \sqrt{x^2 - y^2}.$

$\quad\quad 2b = x \mp \sqrt{x^2 - y^2}$

Thus $a = \frac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - y^2}\}$, and $b = \frac{1}{2}\{x - \sqrt{x^2 - y^2}\}$ (1)

Or $a = \frac{1}{2}\{x - \sqrt{x^2 - y^2}\}$, and $b = \frac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - y^2}\}$ (2)

Since $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ which is symmetrical in a and b, we may employ one of the sets of values (1) or (2) of a and b.

Thus, $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ where a and b have the values given by either (1) or (2).

Example (1) Find the square root of $12 - 2\sqrt{35}$

Let $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\therefore \quad 12 - 2\sqrt{35} = a + b - 2\sqrt{ab}$

Equating rational and irrational parts,

$\therefore \quad 12 = a + b$ and $2\sqrt{35} = 2\sqrt{ab}$

$\therefore \quad 140 = 4ab.$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 12^2 - 140 = 144 - 140 = 4$

$\therefore \quad (a - b) = \pm 2.$ We can take one of these two values.

$\therefore \quad a - b = 2$ (say)

$\quad\quad a + b = 12$

$\therefore \quad 2a = 14, \quad \therefore \quad a = 7$

This gives $b = 5$

$\therefore$ The required square root $= \sqrt{7} - \sqrt{5}$

Note.— If we take the other value $a - b = -2$, we get the square root as $\sqrt{5} - \sqrt{7}$. The required square root is thus $\pm(\sqrt{7} - \sqrt{5})$.

$\therefore 2a = x \pm \sqrt{x^2 - y^2}$

$2b = x \mp \sqrt{x^2 - y^2}$.

ಹೀಗಾಗಿ, $a = \frac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - y^2}\}$, ಮತ್ತು $b = \frac{1}{2}\{x - \sqrt{x^2 - y^2}\}$ (1)

ಅಥವಾ $a = \frac{1}{2}\{x - \sqrt{x^2 - y^2}\}$, ಮತ್ತು $b = \frac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - y^2}\}$ (2)

$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ಎಂಬುದು a, b ಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ (1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಹೀಗಾಗಿ, $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. ಇಲ್ಲಿ a, b ಗಳು (1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ ಉಕ್ತವಾಗಿರುವ ಬೆಲೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ (1) ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$12 - 2\sqrt{35}$$

$$\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ ಇರಲಿ.}$$

$$\therefore 12 - 2\sqrt{35} = a + b - 2\sqrt{ab}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಮವಾಗಿಡುವುದರಿಂದ

$$\therefore 12 = a + b \text{ ಮತ್ತು } 2\sqrt{35} = 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore 140 = 4ab$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 12^2 - 140 = 144 - 140 = 4$$

$\therefore (a - b) = \pm 2$. ಈ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಒಂದನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

$\therefore a - b = 2$

$a + b = 12$

$\therefore 2a = 14 \quad \therefore a = 7$

$b = 5$ ಎಂದು ಇದು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಬೇಕಾದ ವರ್ಗಮೂಲ $= \sqrt{7} - \sqrt{5}$

ಗಮನಿಸಿ : $a - b = -2$ ಎಂದು ಬೇರೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವರ್ಗಮೂಲವು $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. $\therefore$ ಬೇಕಾದ ವರ್ಗಮೂಲ $= \pm(\sqrt{7} - \sqrt{5})$.

Example (2) Find the 4th root of $98+40\sqrt{6}$.

First we find $\sqrt{98+40\sqrt{6}}$ If this is $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

we get $98+40\sqrt{6}=a+b+2\sqrt{ab}$.

$\therefore \quad a+b=98$ and $40\sqrt{6}=2\sqrt{ab} \quad \therefore \quad 9600=4ab$.

$\therefore \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=98^2-9600=9604-9600$
$=4$

$\therefore \quad a-b=2$

$a+b=98$

$\therefore \; 2a=100 \quad \therefore \; a=50$ and $b=48$

$\therefore \; \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{50}+\sqrt{48}=\sqrt{25}\sqrt{2}+\sqrt{16}\sqrt{3}$

$=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

Now we find the square root of $(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

$5\sqrt{2}+4\sqrt{3}=\sqrt{2}\,[5+2\sqrt{6}]$

But $\sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{2}}\,\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Put $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore \quad 5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x+y=5$ and $2\sqrt{6}=2\sqrt{xy}$ or $24=4xy$.

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-24=25 \quad 24=1$

$\therefore x+y=5$

$x-y=1$

$\therefore 2x=6 \therefore x=3$

$2y=4 \therefore y=2$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ದಾಹರಣೆ (2) $98+40\sqrt{6}$ ಇದರ 4ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಲು $\sqrt{98+40\sqrt{6}}$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದು $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ಆದರೆ,

$$98+40\sqrt{6}=a+b+2\sqrt{ab}$$

$\therefore\ a+b=98$ ಮತ್ತು $40\sqrt{6}=2\sqrt{ab}$

$$9600=4ab$$

$$\therefore\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=98^2-9600$$
$$=9604-9600=4$$

$\therefore\ a-b=2$

$a+b=98$

$\therefore\ 2a=100\ \therefore\ a=50$ ಮತ್ತು $b=48$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{50}+\sqrt{48}=\sqrt{25}\sqrt{2}+\sqrt{16}\sqrt{3}$

$=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

ಈಗ $(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$5\sqrt{2}+4\sqrt{3}=\sqrt{2}\ [5+2\sqrt{6}]$$

ಆದರೆ $\sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ,

$\therefore\ 5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore\ x+y=5$ ಮತ್ತು $2\sqrt{6}=2\sqrt{xy}$ ಅಥವಾ $24=4\,xy$

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-24=25-24=1$

$\therefore x+y=5$

$x-y=1$

$\therefore 2x=6\ \therefore x=3$

$2y=4\ \therefore y=2$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$$

$$ie: \sqrt[4]{98+40\sqrt{6}} = \sqrt[4]{2}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$$

Example (3) Show that

$$\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{6}{\sqrt{30+12\sqrt{6}}} + \frac{19}{\sqrt{35+12\sqrt{6}}} = 0$$

Evaluating the square roots in the usual way, we have

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{30+12\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{35+12\sqrt{6}} = 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ L. H. S.} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} - \frac{19}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

Rationalising the denominators, we have

$$\text{L. H. S.} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{6(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

$$- \frac{19(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-1}$$

$$- \frac{6(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{12-18} - \frac{19(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{27-8}$$

$$= (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (2\sqrt{3}-3\sqrt{2}) - (3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{3}(1+2-3) + \sqrt{2}(1-3+2) = 0$$

$$\therefore \sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$$

$$\sqrt[4]{98+40\sqrt{6}} = \sqrt[4]{2}\left\{\sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$$

<u>ಉದಾಹರಣೆ</u> (3) ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ :—

$$\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{6}}} - \frac{6}{\sqrt{30+12\sqrt{6}}} + \frac{19}{\sqrt{35+12\sqrt{6}}} = 0$$

ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವಾಡಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಿಂದ ಪಡೆದರೆ,

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{30+12\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

$\sqrt{35+12\sqrt{6}} = 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

$$\therefore \text{ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} - \frac{19}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

ಛೇದಗಳನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$\text{ಎಡ ಪಾರ್ಶ್ವ} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{6(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

$$- \frac{19(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-1} - \frac{6(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{12-18} - \frac{19(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{27-8}$$

$$= (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (2\sqrt{3}-3\sqrt{2}) - (3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{3}(1+2-3) + \sqrt{2}(1-3+2) = 0$$

We have the identities

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 = x+y+z-2\sqrt{yx}-2\sqrt{zx}+2\sqrt{x}$$

With the help of these we can obtain the squa roots of surds of the form $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$,

$a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$, when they exist in the form

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$, as shown in the examples given below.

Now if $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ has a square root of t form $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, then

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} = (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$

$$= x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{x}$$

Equating rational and irrational parts, we get,

$a = x+y+z$ (1) and $2\sqrt{yz}=\sqrt{b}$ (2)

$2\sqrt{za}=\sqrt{c}$ (3)

$2\sqrt{xy}=\sqrt{d}$ (4)

Using (2), (3) and (4) we can find x, y, z as follow

$$\frac{(2)\times(3)}{(4)} \text{ gives } \frac{2\sqrt{yz}\sqrt{zx}}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{d}}.$$

$\therefore z = \sqrt{\dfrac{bc}{d}}$, similarly we get

$$x = \sqrt{\frac{cd}{b}}, \quad y = \sqrt{\frac{db}{c}},$$

ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಗಳು

ಮುಂದಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy},$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2=x+y+z-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}.$$

ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ, $+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$ ರೂಪದ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\pm z$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯು ವುದು.

ಈಗ $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ಕ್ಕೆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ರ್ಗಮೂಲವಿದ್ದರೆ,

$$+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$

$$=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$$

ಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

(1) $a=x+y+z$ ಮತ್ತು

(2) $2\sqrt{yz}=\sqrt{b}$ (3) $2\sqrt{zx}=\sqrt{c}$ (4) $2\sqrt{xy}=\sqrt{d}$

(2), (3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ x, y, z ಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಂಡು ಡಿಯಬಹುದು.

$\frac{(2)\times(3)}{(4)}$ ರಿಂದ, $\frac{2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx}}{2\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$

$\therefore\quad z=\sqrt{\frac{bc}{d}}$, ಹೀಗೆ

$x=\sqrt{\frac{cd}{b}}$, $y=\sqrt{\frac{db}{c}}$, ಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯು ವುದು.

We notice here that these values of x, y, z were determined independently of the equation (1). If now the values of x, y, z satisfy the equation (1), then and then only the surd $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ will have a square root of the form $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

In this case, the square root of the given surd is $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Example (1) Find the square root of
$15+2\sqrt{15}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}$

Let the square root of the number $=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Squaring we get

$$15+2\sqrt{15}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}$$
$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$$

$\therefore$ Equating rational and irrational parts,

$x+y+z=15, \quad \sqrt{xy}=\sqrt{15}, \quad \sqrt{yz}=\sqrt{35},$
$\sqrt{zx}=\sqrt{21}.$

$$\therefore\ x=\sqrt{\frac{xy\times zx}{yz}}=\sqrt{\frac{15\times 21}{35}}=\sqrt{9}=3$$

$$y=\sqrt{\frac{xy\times yz}{zx}}=\sqrt{\frac{15\times 35}{21}}=\sqrt{25}=5$$

$$z=\sqrt{\frac{yz\times zx}{xy}}=\sqrt{\frac{35\times 21}{15}}=\sqrt{49} \quad \therefore\ z=7.$$

This gives $x+y+z=3+5+7=15.$

$\therefore\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ is the required square root.

Example (2) Next consider the surd $2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ If this has a square root of the form $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}.$ then $2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}.$$

Equating rational and irrational parts, we get $x+y+z=o, \ \sqrt{xy}=\sqrt{6}, \ \sqrt{yz}=\sqrt{10}, \sqrt{zx}=\sqrt{15}.$

x, y, z ಗಳ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನುಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು (1)ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಗೆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಅಂಥ ಒಂದು ವರ್ಗಮೂಲವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಆಗ (1) ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ಎಂಬುದು, ದತ್ತ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (1) ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$15+2\sqrt{15}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}$

ವರ್ಗಮೂಲ $=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, ಎಂದಿರಲಿ.

ವರ್ಗಿಸುವುದರಿಂದ, $15+2\sqrt{15}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$

$x+y+z=15,\ \sqrt{xy}=\sqrt{15},\ \sqrt{yz}=\sqrt{35},\ \sqrt{zx}=\sqrt{21}$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{xy\times zx}{yz}} = \sqrt{\frac{15\times 21}{35}} = \sqrt{9} = 3$$

$$y = \sqrt{\frac{xy\times yz}{zx}} = \sqrt{\frac{15\times 35}{21}} = \sqrt{25} = 5$$

$$z = \sqrt{\frac{yz\times zx}{xy}} = \sqrt{\frac{35\times 21}{15}} = \sqrt{49} \quad \therefore z=7$$

ಇವು $x+y+z=3+5+7=15$ ಅನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ಇದು ಬೇಕಾದ ಮೂಲವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (2) ಮುಂದೆ, $2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$, ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಮೂಲವಿದ್ದರೆ, ಆಗ $2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}.$$

$x+y+z=0,\ \sqrt{xy}=\sqrt{6},\ \sqrt{yz}=\sqrt{10},\ \sqrt{zx}=\sqrt{15}$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{xy}\ \sqrt{zx}}{\sqrt{yz}} = \sqrt{\frac{6\times 15}{10}} = \sqrt{9} = 3.$$

$$y = \frac{\sqrt{xy}\ \sqrt{yz}}{\sqrt{zx}} = \sqrt{\frac{6\times 10}{15}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$z = \frac{\sqrt{xz}\ \sqrt{yz}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{10\times 15}{6}} = \sqrt{25} = 5.$$

But $x+y+z = 10 \neq 0$.

$\therefore$ $2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ has no square root of the form $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

On the other hand, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

$= (3+2+5) + 2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$.

$= 10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$.

Thus $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ has $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ as its square root.

Exercises : 3·5

I. Find the square root of each of the following :

(1) $28-10\sqrt{3}$ (2) $11+2\sqrt{30}$

(3) $9-2\sqrt{20}$ (4) $14-3\sqrt{20}$

(5) $\sqrt{45}+\sqrt{40}$ (6) $17\sqrt{3}-4\sqrt{45}$

II. Find the 4th root of each of the following :

(1) $28-16\sqrt{3}$ (2) $68+48\sqrt{2}$

(3) $\frac{7}{4}-\sqrt{3}$ (4) $97-56\sqrt{3}$

(5) $56+24\sqrt{5}$ (6) $49-20\sqrt{6}$

$$\therefore\ x = \frac{\sqrt{xy}\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}} = \sqrt{\frac{6\times 15}{10}} = \sqrt{9} = 3$$

$$y = \frac{\sqrt{xy}\sqrt{yz}}{\sqrt{zx}} = \sqrt{\frac{6\times 10}{15}} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = \frac{\sqrt{yz}\sqrt{zx}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{10\times 15}{6}} = \sqrt{25} = 5$$

ಆದರೆ $x+y+z=10\neq 0$

$\therefore\ 2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ ಕ್ಕೆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ರೂಪಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಮೂಲವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

$= (3+2+5)+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

$= 10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

ಹೀಗೆ $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ ಕ್ಕೆ $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3.5

I ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದಕ್ಕೂ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :—

(1) $28-10\sqrt{3}$ (2) $11+2\sqrt{30}$

(3) $9-2\sqrt{20}$ (4) $14-3\sqrt{20}$

(5) $\sqrt{45}+\sqrt{40}$ (6) $17\sqrt{3}-4\sqrt{45}$

II ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದಕೂ 4ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :—

(1) $28-16\sqrt{3}$ (2) $68+48\sqrt{2}$ (3) $\frac{7}{4}-\sqrt{3}$

(4) $97-56\sqrt{3}$ (5) $56+24\sqrt{5}$ (6) $49-20\sqrt{6}$

III. Find the square roots of the following :

$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

$11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

$9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}$.

$12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4\sqrt{6}$.

IV Show that

(1) $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}-\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}+\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=0$$

(3) $$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}=0$$

3.7 Logarithms.

Definition :—

If $a>0$, and $\neq 1$, and $y=a^x$, then x is said to be the logarithm of y to the base a, and is denoted by the symbol $x=\log_a y$.

e.g. $2^4=16$ $\therefore \log_2 16=4$

$8^2=64$ $\therefore \log_8 64=2$

$27^{\frac{1}{3}}=3$ $\therefore \log_{27} 3=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$ $\therefore \log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5}=\frac{1}{3}$

$10^{-2}=\frac{1}{100}$ $\therefore \log_{10} \frac{1}{100}=-2$

III ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :—

$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}$

$12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4\sqrt{6}$

IV ಇವುগಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ:—

(1) $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}-\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}+\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=0$$

(3) $$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}=0$$

3·7 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :—$a>o$, $\neq 1$ ಮತ್ತು $y=a^x$ ಆದರೆ, xನ್ನು a ಆಧಾರದಲ್ಲಿ yಯ ಪ್ರತಿಘಾತವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು $x=log_a y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ.—$2^4=16 \therefore log_2 16=4$

$8^2=64 \therefore log_8 64=2$

$27^{\frac{1}{3}}=3 \therefore log_{27} 3=\frac{1}{3}$

$(\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{5} \therefore log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5}=\frac{1}{3}$

$10^{-2}=\frac{1}{100} \therefore log_{10} \frac{1}{100}=-2.$

Logarithms were invented by John Napier (1550—1617) a Scottish Astronomer, with a view to simplify laboriou numerical calculations. The base used by him was number e, the value of which is 2.718 approximately, t 3 places of decimals. These are called *natural logarithms* Briggs, working on Napier's suggestion employe 10 as the base, and published a table of logarithms t this base in 1617. These are called *common logarithms* In addition to simplifying numerical computation, th concept of logarithms is of great importance in highe mathematics.

3.8 Basic Properties of logarithms.

The properties of logarithms will be direct consequenc of the laws of indices. The following properties will b found true whatever the base may be.

We have $a^{\circ}=1 \quad \therefore \log_a 1=0$.

Thus, "the logarithm of 1 is 0, for any base."

Again, $a^1=a \quad \therefore \quad \log_a a=1$

Thus, "the logarithm of the base itself is always 1"

From the laws of indices, given below, we prove thr important theorems on logarithms :

(1) $a^m \times a^n=a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n=a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$

Theorem. (1) $\boxed{\log_a mn=\log_a m+\log_a n}$ .... (3.7)

Proof :—

Let $m=a^x, n=a^y$

$\therefore \quad x=\log_a m$, and $y=\log_a n$.

Now $a^x . a^y=a^{x+y}=mn$.

ಶ್ರಮಕರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಖ್ಖಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭಗೊಳಿಸುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಜಾನ್ ನೇಪಿಯರ್ ಎಂಬ ಸ್ಕಾಟಿಷ್ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು (1550–1617) ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಈತನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಆಧಾರವು e ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ: ಇದರ ಬೆಲೆ 3 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ 2·718 ಆಗುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಎಂಬ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ನೇಪಿಯರ್ ಅವರ ಸಲಹೆಯ ಮೇಲೆ 10ನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಗಣಿಸಿದ್ದ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು 1617ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಖ್ಖಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭಗೊಳಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಪ್ರತಿಘಾತವೆಂಬ ಭಾವನೆಯು ಪ್ರೌಢ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುದು.

3·8 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೂಲ ಗುಣಗಳು

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಗುಣಗಳು ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳ ನೇರವಾದ ಪ್ರತಿಫಲಗಳಾಗಿವೆ. ಆಧಾರವು ಯಾವುದೇ ಆಗಲಿ, ಈ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಗುಣಗಳು ಸರಿನಿಲ್ಲುತ್ತವೆ.

$a^\circ = 1$ ಎಂದಿದೆ; $\therefore \log_a 1 = 0.$

ಹೀಗೆ, "ಯಾವ ಆಧಾರವೇ ಆಗಲಿ, 1ರ ಪ್ರತಿಘಾತವು 0."

ಪುನಃ, $a^1 = a \quad \therefore \quad \log_a a = 1\cdot$

ಹೀಗೆ, "ಆಧಾರದ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಆಗಿದೆ."

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳಿಂದ, ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೂರು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

ಪ್ರಮೇಯ (1) $\boxed{\log_a mn = \log_a m + \log_a n}$ . . . . . (3·7)

ಸಾಧನೆ:— $m = a^x$, $n = a^y$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad x = \log_a m$, ಮತ್ತು $y = \log_a n$

ಈಗ $a^x . a^y = a^{x+y} = mn.$

$\therefore \quad x+y=\log_a mn$

On substituting for x and y on the L. H. S.,

$$\boxed{\log_a m+\log_a n=\log_a mn.}$$

The logarithm of a product=The sum of the logarithm of its factors

Theorem. (2) $\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m-\log_a n}$ . . . . . (3.8

Proof :—Let $m=a^x$ $\quad n=a^y$

$\therefore \quad x=\log_a m \quad , \quad y=\log_a n$

$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$

$\because \quad \log_a \frac{m}{n} = x-y$

Substituting for x and y, we get

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n}.$$

The logarithm of the quotient of two numbers = t difference of the logarithms.

Theorem (3) $\boxed{\log_a m^k = k \log_a m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.9)}$

Proof :—

Let $m=a^x \quad \therefore \quad x=\log_a m$

$\therefore \quad m^k=(a^x)^k=a^{kx}$

$\therefore \quad \log_a m^k=kx$

Substituting for x, we get,

$$\therefore \quad \boxed{\log_a m^k = k \log_a m}$$

The logarithm of the k^{th} power of a number $=k$ tin the logarithm of that number.

$\therefore \quad x+y = log_a mn.$

ಎಡಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ x, y ಗಳಿಗೆ ಆಯಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಲಾಗಿ,

$\therefore \quad log_a m + log_a n = log_a mn$

ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪ್ರತಿಘಾತವು = ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತ.

<u>ಪ್ರಮೇಯ</u> (2) $\boxed{log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n}$ . . . . (3.8)

ಸಾಧನೆ:— $m = a^x, \quad n = a^y$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore x = log_a m, \; y = log_a n$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore log_a \frac{m}{n} = x-y$$

x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಆದೇಶಿಸಲಾಗಿ,

$$log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n$$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಪ್ರತಿಘಾತವು = ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

<u>ಪ್ರಮೇಯ</u> (3) $\boxed{log_a m^k = k \; log_a m}$ . . . .(3·9)

ಸಾಧನೆ :— $m = a^x$ ಎಂದಿರಲಿ, $\therefore x = log_a m$

$$\therefore m^k = (a^x)^k = a^{kx}$$

$$\therefore log_a m^k = kx$$

$$\therefore log_a m^k = k \; log_a m$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ kನೆಯ ಘಾತದ ಪ್ರತಿಘಾತವು = $k \times$ (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತ)

Examples :—

I (1) $\log (7 \times 11) = \log 7 + \log 11.$

whatever the base may be.

(2) $\log \dfrac{3.1416}{1.41} = \log 3.1416 - \log 1.41.$

(3) $\log (12.52)^2 = 2 \log 12.52$

(4) $\log (83.04)^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} \log 83.04$

(5) $\log \sqrt[3]{47^2} = \log 47^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log 47.$

II Given $\log_{10} 2 = 0.3010$ and $\log_{10} 3 = 0.4771$ fi[nd]

(1) $\log_{10} \sqrt[3]{36}$

$\log_{10} \sqrt[3]{36} = \log_{10} 36^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{10} 36 = \frac{1}{3} \log_{10} 2^2 \times 3^2$

$= \frac{1}{3} \log_{10} 2^2 + \frac{1}{3} \log_{10} 3^2$

$= \frac{2}{3} \log_{10} 2 + \frac{2}{3} \log_{10} 3$

$= \frac{2}{3} \{0.3010 + 0.4771\}$

$= \frac{2}{3} \{0.7781\}$

$= 0.5187$, correct to 4 places of decimals.

(2) $\log_{10} \sqrt[4]{120}.$

$= \frac{1}{4} \log_{10} 120 = \frac{1}{4} \{\log_{10} 10 \times 2^2 \times 3\}$

$= \frac{1}{4} \{\log_{10} 10 + 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3\}$

$= \frac{1}{4} \{1 + 2 (0.3010) + (0.4771)\}$

$= \frac{1}{4} \{1 + 0.6020 + 0.4771\}$

$= \frac{1}{4} \{2.0791\}$

$= 0.5198$, correct to 4 places of decimal.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು I :—(1) ಆಧಾರವು ಯಾವುದೇ ಇರಲಿ $\log(7\times11)$

$$=\log 7+\log 11.$$

(2) $\log\dfrac{3.1416}{1.41}=\log 3.1416-\log 1.41$

(3) $\log(12\cdot52)^2=2\log 12\cdot52$

(4) $\log(83.04)^{\frac{5}{6}}=\frac{5}{6}\log 83.04$

(5) $\log\sqrt[3]{47^2}=\log 47^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log 47.$

II (1) $\log_{10}2=0\cdot3010$ ಮತ್ತು $\log_{10}3=0\cdot4771$ ಆದರೆ

(1) $\log_{10}\sqrt[3]{36}$ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\log_{10}\sqrt[3]{36}=\log_{10}36^{\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{3}\log_{10}36=\tfrac{1}{3}\log_{10}2^2\times3^2$$

$$=\tfrac{1}{3}\log_{10}2^2+\tfrac{1}{3}\log_{10}3^2$$

$$=\tfrac{2}{3}\log_{10}2+\tfrac{2}{3}\log_{10}3$$

$$=\tfrac{2}{3}\{0\cdot3010+0\cdot4771\}$$

$$=\tfrac{2}{3}\{0\cdot7781\}$$

$=0\cdot5187$, (ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ).

(2) $\log_{10}\sqrt[4]{120}$

$$=\tfrac{1}{4}\log_{10}120=\tfrac{1}{4}\{\log_{10}10\times2^2\times3\}$$

$$=\tfrac{1}{4}[\log_{10}10+2\log_{10}2+\log_{10}3]$$

$$=\tfrac{1}{4}[1+2(0\cdot3010)+(0\cdot4771)]$$

$$=\tfrac{1}{4}[1+0\cdot6020+0\cdot4771]$$

$$=\tfrac{1}{4}\{2\cdot0791\}$$

$=0\cdot5198$ (ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ.)

Exercises 3.6

I. Write out each of the following equations in th logarithmic form :

(1) $2^6=64$
2) $256^{\frac{1}{2}}=16$
(3) $10^{1.656} = 45.3$
(4) $5^{-2} = .04$
(5) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

II. Express each of the following equations, in tl form of a power of the base :

(1) $\log_3 81=4.$
(2) $\log_{11} 121=2$
(3) $\log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{32})=5$
(4) $\log_{10} 35=1.5441$
(5) $\log_{10} e=0.4343$

III. Given that $\log_{10} 2=0.3010$, $\log_{10} 3=0.477$ $\log_{10} 5=0.6990$ and $\log_{10} 7=0.8451$. find the logarith of each of the following to base 10.

(1) $\sqrt[3]{40}$
(2) $\sqrt[5]{108^2}$
(3) $\left[168\right]^{\frac{7}{8}}$
(4) $\sqrt[3]{\frac{147}{20}}$
(5) $\left(\frac{50}{343}\right)^{64}$
(6) $\{625\div108\}^{7.2}$
(7) $\{98\div125\}^{11}$
(8) $\{343\div42\}^{0.}$
(9) $\{35\times64\}^{-2}$
(10) $\left\{\frac{21\times490}{343}\right\}$

IV. Given $\log_{10} 54.23 = 1{\cdot}7342$, a $\log_{10} 4{\cdot}723=0.6742$, evaluate the logarithms to base 10, each of the following :

(1) $(54.23)^2\times(4.723)$[illegible]
2) $(542.3)\times(472.3)^2$
(3) $\sqrt{\frac{5.423}{47.23}}$
(4) $\{(54.23)\div472.3\}^{-1.2}$
(5) $\sqrt[5]{\frac{(47.23)^2}{(5.423)^3}}$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3 · 6

I ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಪ್ರತಿ ಘಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(1) $2^6 = 64$ (2) $256^{\frac{1}{2}} = 16$ (3) $10^{1.656} = 45{\cdot}3$

(4) $5^{-2} = {\cdot}04$ (5) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

II ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನೂ ಆಧಾರದ ಘಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ :

(1) $\log_3 81 = 4$ (2) $\log_{11} 121 = 2$ (3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}\right) = 5$

(4) $\log_{10} 35 = 1{\cdot}5441$ (5) $\log_{10} e = 0{\cdot}4343$

III $\log_{10} 2 = 0{\cdot}3010$, $\log_{10} 3 = 0{\cdot}4771$, $\log_{10} 5 = 0{\cdot}6990$ ಮತ್ತು $\log_{10} 7 = 0{\cdot}8451$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳನ್ನು 10 ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\sqrt[3]{40}$ (2) $\sqrt[5]{108^2}$ (3) $\{168\}^{\frac{7}{8}}$ (4) $\sqrt[3]{\frac{147}{20}}$

(5) $\left(\frac{50}{343}\right)^{64}$ (6) $\{625 \div 108\}^{7.2}$ (7) $\{98 \div 125\}^{11.1}$

(8) $\{343 \div 42\}^{0.12}$ (9) $\{35 \times 64\}^{-2.1}$

(10) $\left\{\frac{21 \times 490}{343}\right\}^{2.1}$

IV $\log_{10} 54{\cdot}23 = 1{\cdot}7342$ ಮತ್ತು $\log_{10} 4{\cdot}723 = 0{\cdot}6742$ ಆದರೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳನ್ನು 10 ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $(54{\cdot}23)^2 \times (4{\cdot}723)^{\frac{1}{2}}$

(2) $(542{\cdot}3) \times (472{\cdot}3)^2$

(3) $\sqrt{\frac{5{\cdot}423}{47{\cdot}23}}$

(4) $\{(54{\cdot}23) \div (472{\cdot}3)\}^{-1.2}$

(5) $\sqrt[5]{\frac{(47{\cdot}23)^2}{(5{\cdot}423)^3}}$

3.9 Common Logarithms

(1) Logarithms calculated to the base 10 are calle c mmon logarithms. In what follows the base is nc indicated in the symbol for the logarithm

We have:

10^3	=	1000	$\therefore$ log 1000	= 3
10^2	=	100	$\therefore$ log 100	= 2
10^1	=	10	$\therefore$ log 10	= 1
10°	=	1	$\therefore$ log 1	= 0
10^{-1}	=	.1	$\therefore$ log .1	= 1
10^{-2}	=	.01	$\therefore$ log .01	= 2
10^{-3}	=	.001	$\therefore$ log .001	= 3

$\therefore$ logarithms of integral powers of 10 are intege Thus log 100 = 2 and log 1000 = 3. Now 845 is a numb which lies between 100 and 1000. $\therefore$ log 845 lies betwe 2 and 3.

$$\therefore \log 845 = 2 + \text{a fraction}$$

The logarithm of a number therefore consists of integral part called the characteristic, and a fractio part, called the mantissa. This characteristic may either positive, zero or negative, but the logarithm is alwa written so that the mantissa is positive.

(2) *Determination of the characteristic of the logarit of a number, expressed in the decimal form.*

It is easily seen from the table given above, that logarithm of a number between

100 and 1000 (that is, having 3 digits) = 2 + a posit proper fraction.

10 and 100 (that is having 2 digits) = 1 + a posit proper fraction.

1 and 10 (that is, having 1 digit) = 0 + a posit proper fraction.

3.9 ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು.

(1) 10ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಗಣಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳು. ಈ ಮುಂದೆ, ಪ್ರತಿಘಾತದ ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಆಧಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ,

$$10^3 = 1000 \quad \therefore \log 1000 = 3$$
$$10^2 = 100 \quad \therefore \log 100 = 2$$
$$10^1 = 10 \quad \therefore \log 10 = 1$$
$$10^0 = 1 \quad \therefore \log 1 = 0$$
$$10^{-1} = \cdot 1 \quad \therefore \log \cdot 1 = -1$$
$$10^{-2} = \cdot 01 \quad \therefore \log \cdot 01 = -2$$
$$10^{-3} = \cdot 001 \quad \therefore \log .001 = -3$$

$\therefore$ 10ರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ...ೀಗಾಗಿ $\log 100 = 2$, ಮತ್ತು $\log 1000 = 3$. ಈಗ 845 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 100 ಮತ್ತು 1000ದ ಮಧ್ಯೆ ಇದೆ. $\therefore \log 845$ ಎಂಬುದು 2 ಮತ್ತು 3ರ ...ಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore \log 845 = 2 +$ (ಭಿನ್ನರಾಶಿ)

...ದುದರಿಂದ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭಾಗವನ್ನು ...ುತ್ತು ಒಂದು ಭಿನ್ನಾಂಕದ ಭಾಗವನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭಾಗ ...ನ್ನು ಸ್ವರೂಪಾಂಕವೆಂದೂ, ಭಿನ್ನಾಂಕದ ಭಾಗವನ್ನೂ ಶೇಷಾಂಕವೆಂದೂ ಕರೆಯು ...ೇವೆ. ಈ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೋ, ಶೂನ್ಯವಾಗಿಯೋ, ಅಥವಾ ...ುಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೋ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಶೇಷಾಂಕವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ...ಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ...ಸ್ವರೂಪಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

...ೀಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ,

100 ರಿಂದ 1000ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಮೂರು ಅಂಕಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ...ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು $= 2 +$ (ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಧನಸಂಖ್ಯೆ)

10 ರಿಂದ 100..........................(ಎರಡು...............)....................
.... $= 1 +$ (— ,, —)

1 ರಿಂದ 10..........................(ಒಂದು...............)....................
.... $= 0 +$ (— ,, —)

For a number that lies between 0.1 and 1, the logarithm lies between —1 and 0.

∴ it can be written as —1+ (a positive proper fraction).

This is usually written in the form $\bar{1}$ + (a fraction) where the negative sign of (—1) is written on the top of 1. By this device a number like

—1+0·7823 can be written as $\bar{1}$.7823 in a compact form, and it keeps the mantissa positive.

Thus we find that the logarithm of a number which lies between

.1 and 1	$=\bar{1}+$ a positive proper fraction.
.01 and .1	$=\bar{2}+$ a positive proper fraction.
.001 and .01	$=\bar{3}+$ a positive proper fraction.

From an inspection of these cases, we can enunciate the following rule for determining the characteristics.

" The characteristic of the logarithm of a number $>$ 1 is a positive integer and is one less than the number of digits in the integral part of the number.

The characteristic of the logarithm of a number $<$ 1 is a negative integer, and is one more than the number of zeros immediately after the decimal point."

Example :

Given that log 5.273=.7220, write down the numbers whose logarithms are 1.7220, 3.7220, $\bar{2}$.7220, and $\bar{3}$.72
Now log 5.273 = 0.7220.

(1) If the characteristic is 1, the number must contain two digits to the left of the decimal point.

∴ The number whose logarithm is 1.7220 is 52.73

(2) If the characteristic is 3, the number must have 4 digits to the left of the decimal point.

∴ The number whose logarithm is 3.7220 is 5273

0.1 ರಿಂದ 1ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ, ಪ್ರತಿಘಾತವು—1ರಿಂದ 0ವರೆಗೆ ಇರುಹುದು ∴ ಇದನ್ನು —1+(ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\bar{1}$+(ಭಿನ್ನರಾಶಿ) ಎಂಬ ಹಾಗೆ, ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯಾದ (—)ನ್ನು 1ರ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಯುಕ್ತಿಯಿಂದ —1+0·7823 ಎನ್ನುವಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು $\bar{1}$·7823 ಎಂದು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು; ಇದರಿಂದ ಶೇಷಾಂಕವು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ,

.1 ರಿಂದ 1ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು = $\bar{1}$+ (ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ)

·01 ರಿಂದ ·1 .... = $\bar{2}$+(..............................)

·001 ರಿಂದ ·01 .... = $\bar{3}$ + (..........................

ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಸ್ವರೂಪಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಚ್ಚರಿಸಬಹುದು.

"ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ; ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಭಾಗದ ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ; ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಿಡಿದು ಮೊದಲನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಅಂಕದವರೆಗಿರುವ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ."

<u>ಉದಾ</u>—log 5·273 = ·7220 ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ; ಇದರಿಂದ 1·7220, 3·7220, $\bar{2}$·7220 ಮತ್ತು $\bar{3}$·7220 ಗಳು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕು.

∴ 1·7220ಯನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ = 52·73

(2) ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 3 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲಿ ೪ ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕು.

∴ 3·7220 ಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ಘಾತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ = 5273.

(3) If the characteristic is $\bar{2}$, there must be one zer immediately after the decimal point, in the given number.

∴ The number whose logarithm is $\bar{2}.7220$ is .0527

(4) Similarly, the number whose logarithm $\bar{3}.7220$ is .005273.

3.10 The use of Logarithmic Tables

The logarithms of numbers to the base 10 have be calculated, and tabulated. Since the characteristics c be written down by inspection, it is sufficient to give or the mantissa in the tables. We use four figure tabl which give sufficient accuracy for all ordinary wo When greater accuracy is needed 5—place or even 7—pl tables may be employed. We shall now explain h to use the four figure tables for finding logarithms. F the sake of reference, we shall furnish an extract from t tables, here.

	0	1	2	3	4	5	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	78
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8

	7	8	9	Mean Differences							
				1	2	3	4	5	6	7	8
61	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6
62	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6
63	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5
64	8109	8116	8112	1	1	2	3	3	4	5	5
65	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5

In the four figure tables of logarithms, the mant are arranged in 90 rows, and 10 columns, together wi other columns, headed as mean differences. The rows numbered from 10 to 99 and the columns from 0 t the columns of mean differences are numbered from 1

(3) ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು $\bar{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಾಚೆಗೆ ಮುಂದಿನ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಮೊದಲ ಅಂಕದವರೆಗೆ 1 ಸೊನ್ನೆಯಿರಬೇಕು.

$\therefore$ $\bar{2}.7220$ನ್ನು ಪ್ರತಿ ಘಾತವಾಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= .05273$.

(4) ಹೀಗೆಯೇ, $\bar{3}.7220$ನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $= .005273$

3·10 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳನ್ನು 10ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಗಣಿಸಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವರು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸುವುದರಿಂದಲೇ, ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತದಲ್ಲಿರುವ characteristic ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಬರೆದುಬಿಡಬಹುದಾದುದರಿಂದ, ಈ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ mantissa ಎಂಬ ಭಿನ್ನಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪಟ್ಟಿನ ನಿಖರತೆಯು ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ 5 ಅಥವಾ 7 ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವಲೋಕನೆಗೋಸ್ಕರವಾಗಿ, ಈ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದೆ.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences		
											123	456	789
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	112	344	566
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	112	334	566
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	112	334	556
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	112	334	566
65	8129	8136	8141	8147	8156	8162	8169	8176	8182	8189	112	334	556

ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಪಟಿ ಗಳಲ್ಲಿ ಶೇಷಾಂಕಗಳನ್ನು 90 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ 10 ಅಂಕಣ (ನೀಟುಸಾಲು) ಗಳಲ್ಲೂ ಬರುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Mean differences) ಎಂಬ ಅಂಕಿತವುಳ್ಳ ಬೇರೆ 9 ಅಂಕಣಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಸಾಲುಗಳನ್ನು 10 ರಿಂದ 99 ವರೆಗೆ ಗುರುತಿಸಿರುತ್ತಾರೆ, ಅಂಕಣಗಳನ್ನು 0 ಯಿಂದ 9 ರವರೆಗೂ, ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಂಕಣಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ 9ರ ವರೆಗೂ ಗುರುತಿಸಿರುವರು.

In order to look up the mantissa of the logarithm of given number, we first note down its first four significa digits ; *e.g.*, in the case of the number 642.302, the fi four significant digits are 6, 4, 2, 3. The first two figu 6 and 4 are used to fix up the row and the third digit 2 used to fix up the column from which the main part of t mantissa is taken. We note down the four figures fou at the intersection of the 64th row and the 2nd column. W find here the four figures 8075.

We next find the mean difference corresponding 3 which is the fourth digit of the given number ; this found at the intersection of the 64th row with the 3 difference column and is seen to be 2, which is next add to 8075. Thus we get $8075+2=8077$.

$\therefore$ The mantissa $= \cdot 8077$.

Since the number 642.302 has 3 digits in its integ part, the characteristic of its logarithm is 2.

$\therefore$ $\log 642.302 = 2.8077$.

Example 2.—To find $\log 0.06209$. This number is <1.

There is one zero immediately to the right of decimal point before the non-zero digit 6 occurs.

$\therefore$ Characteristic of the logarithm of this number (negative integer, one more than the number of zeros).

The mantissa is looked up for the 4 figures 6209 before.

This is equal to $7924 + 6 = 7930$.

$\therefore$ $\log 0.06209 = \bar{2}.7930$.

3.11 Use of the Table of Antilogarithms

If $\log_{10} x = M$, x is the number whose logarit (to base 10) is M. Here x is said to be the *antilogari* of M to base 10. This is denoted by writing

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಶೇಷಾಂಕವನ್ನು ಹುಡುಕಲು, ಮೊದಲು ಆ ಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಗಣನೀಯವಾದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ; ದಾಹರಣೆಗೆ, 642·302 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಗಣನೀಯ ಅಂಕ ು 6, 4, 2, 3. ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡಾದ 6 ಮತ್ತು 4ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಷಾಂಕದ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗವಿರುವ ಸಾಲನ್ನೂ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಅದಿರುವ ಅಂಕಣವನ್ನೂ ಗೊತ್ತುಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈಗ 64 ು ಸಾಲು 2ನೆಯ ಅಂಕಣವನ್ನು ಸೇರುವೆಡೆ ಇರುವ 8075 ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆವು.

ಮುಂದೆ, ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕವಾದ 3ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣ ದ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 64ನೆಯ ಸಾಲು 3ನೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಂಕಣವನ್ನು ಧಿಸುವೆಡೆ ಹುಡಕುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬುದು ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆ ; ಇದನ್ನು ತರುವಾಯ 75ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $8075+2=8077$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಶೇಷಾಂಕ $= \cdot 8077$.

2·302 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 2.

$$\therefore \log 642{\cdot}302 = 2{\cdot}8077.$$

ಉದಾಹರಣೆ (2) : *log* 0·06209 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ 6 ಎಂಬ ಅಂಕದವರೆಗೆ ುದು ಸೊನ್ನೆ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $\overline{2}$.

(ಇದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಅಧಿಕವಾಗಿರಬೇಕು) ದರ ಭಿನ್ನಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು 6209 ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸ ಕು.

$$\text{ಭಿನ್ನಾಂಕ} = 7924+6 = 7930$$

$$\therefore \log 0{\cdot}06209 = \overline{2}{\cdot}7930.$$

3·11 ವಿಲೋಮಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯ ಉಪಯೋಗ.

$\log_{10}x = M$ ಆದರೆ, 10ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ Mನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ನ್ನು 10ರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ M ಎನ್ನುವುದರ ವಿಲೋಮ ತಿಘಾತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$x = \text{antilog}_{10} M$

Keeping the base understood, we write

$x = \text{antilog } M$, if $\log x = M$.

Tables of antilogarithms are available, and can used to read off the number whose logarithm is giv An extract from the table of antilogarithms is given bel

	0	1	2	3	4	5	
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1
.23	1698	1702	1706	1710	714	1718	1
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1

	7	8	9	Mean Differences							
				1	2	3	4	5	6	7	8
.21	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3
.22	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3
.23	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3
.24	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3
.25	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3

In this table we find figures arranged in 100 r and 10 columns, together with 9 others columns, he as Mean Differences. The rows are numbered from ·0 ·99, and the columns from 0 to 9. The difference colu are numbered from 1 to 9.

If it is required to look up the antilogarithm number such as 2.2352 *i.e.* the number whose logari is 2.2352, it should be noted that only the mantissa. will have to be used to find out the four figures of required number from the tables. Now the first decimal places ·23 fix up the row, and the digit in 3rd place 5 fixes up the column from where to ext the main part of the 4 figures of the required nun

$x = \text{antilog}_{10} M$ ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಧಾರವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು,

$$\log x = M \text{ ಆದರೆ, } x = \text{antilog } M \text{ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.}$$

ದತ್ತ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹುಡುಕುವುದಕ್ಕಾಗುವಂತೆ ವಿಲೋಮ ತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಪಟ್ಟಿಯ ಸ್ವಲ್ಪಭಾಗವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಟ್ಟಿದೆ.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean differences		
											123	4 6	789
21	1622	16 6	1629	1633	1637	1641	1664	1648	1652	1656	011	222	333
22	1620	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	011	222	333
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	011	2 2	334
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	770	1774	011	222	334
25	1778	1782	1 86	1791	1795	1799	1803	1807	181	1816	011	222	334

ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 100 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ, 10 ಅಂಕಣಗಳಲ್ಲೂ, ುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿದೆ, ಇವಲ್ಲದೆ, ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೆಂದು (mean differences) ಳಲಾಗುವ ಬೇರೆ ಒಂಬತ್ತು ಅಂಕಣಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಸಾಲುಗಳನ್ನು .00 ಂದ .99 ವರೆಗೂ, ಅಂಕಣಗಳನ್ನು 0 ಯಿಂದ 9 ರವರೆಗೂ ಎಣಿಸಿ ಗುರುತಿಸಿರು ರೆ. ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಂಕಣಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ 9ರ ವರೆಗೆ ಎಣಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

2.2352 ಎನ್ನುವಂಥ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿ ತ (ಎಂದರೆ 2.2352ನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಕಾದರೆ, ಅದರ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಗಣನೀಯ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪಡೆಯಲು ಷಾಂಕವಾದ .2352ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ದಲ ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಾದ .23 ಎಂಬುವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವ ಲನ್ನೂ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 5 ಎಂಬುದು, ಅದು ಇರುವ ಅಂಕಣವನ್ನೂ ರಪಡಿಸುತ್ತವೆ. .23 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಸಾಲು 5 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕಣವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 1718. ಶೇಷಾಂಕದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ಥಾನ ರುವ 2 ಎಂಬ ಅಂಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು .23 ಎಂದು ಗುರುತಿ ುವ ಇದೇ ಸಾಲು, 2 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಂಕಣವನ್ನು ಸೇರುವೆಡೆ ಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ 1 ಎಂಬ ಅಂಕವನ್ನು 1718ಕ್ಕೆ ಕೂಡುವುದ ದ, 1718 + 1 = 1719 ಎಂಬುದಾಗಿ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ನೀಯವಾದ ಅಂಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

At the intersection of the row marked as .23 and t
column marked as 5 we find the number 1718. T
mean difference corresponding the digit 2, in the fou
place of the mantissa is to be found at the intersection
the same row marked as ·23 and the difference colu
headed by 2. The digit found there is 1, which is n
added to 1718. Thus we get $1718+1=1719$ which gi
the first four significant digits of the required numb
The characteristic of the logarithm being 2, we infer t
the required number must have 3 digits in its integ
part.

$\therefore$ antilog $2.2352=171.9$

Ex. (1) To find antilog 2.2364

The figure at the intersection of the row headed
·23 and column headed by 6 = 1722

Mean difference in the same row and the column headed by 4, the 4th figure of the mantissa } = 2

1724 , on addi

Now the characteristic is 2 ; $\therefore$ there must b
digits before the decimal point.

$\therefore$ antilog $\bar{2}.2364=172.4$

Ex. (2) To find antilog $\bar{2}.2576$

The figure at the intersection of the row headed
·25 and the column headed by 7 = 1807

Mean difference corresponding to 6, the 4th figure in the mantissa. } = 2

1809, on addi

Now the characteristic is $\bar{2}$ The number is<1.

$\therefore$ There must be one zero immediately after
decimal point.

$\therefore$ antilog $\bar{2}\cdot2576=0.01809$.

ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕೆಂದು ಅನುಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ುದರಿಂದ,

$$\text{antilog } 2.2352 = 171.9$$

ಉದಾ. (1) antilog 2.2364ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

.23ಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯನ್ನು 6 ಎಂಬುದರಿಂದ ಮೊದಲಾಗುವ

ನೀಟುಗೆರೆ ಸಂಧಿಸುವ ಕಡೆ ಇರುವ ಅಂಕಗಳು	=	1722
ಇದೇ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನಾಂಕದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 4 ಎಂಬ ಅಂಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	=	2
ಕೂಡಿದರೆ,		1724

ಈಗ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 2. ∴ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ ಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕು.

$$\therefore \text{antilog } 2.2364 = 172.4$$

ಉದಾ. (2) antilog $\bar{2}.2576$ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

0·25 ಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯನ್ನು 7 ರಿಂದ ಮೊದಲಾಗುವ

ನೀಟುಗೆರೆ ಸಂಧಿಸುವ ಕಡೆ ಇರುವ ಅಂಕಗಳು	=	1807
ಭಿನ್ನಾಂಕದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 6 ಎಂಬ ಅಂಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	=	2
ಕೂಡಲಾಗಿ,		1809

ಈಗ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $\bar{2}$. ಸಂಖ್ಯೆ <1 ∴ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ೊದಲನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದೆ ಅಂಕದವರೆಗೆ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆ ಇರಬೇಕು.

$$\therefore \text{antilog } \bar{2}\cdot 2576 = 0\cdot 01809$$

3.12 Use of common logarithms in numerical calculations.

Employing the equations (3.7), (3.8) and (3.9) mul plication, division and powers of numbers can be eas worked out. Logarithms actually convert multiplicati and division into addition and subtraction. The proces of involution and evolution, *viz.*, that of raising a num to any power, and extraction of any root of a number converted into multiplication and division. The follow examples illustrate how these calculations are carried with the help of logarithms.

Ex. (1) Evaluate $\dfrac{473.725 \times 0.0257}{11.257}$

Let $x = \dfrac{473.725 \times 0.0257}{11.257}$

$\therefore \log x = \log 473{\cdot}725 + \log 0{\cdot}0257 - \log 11{\cdot}257.$

To find log 473·725.

This number has 3 digits in its integral part.

∴ the characteristic of its logarithm is 2.

To find the mantissa from the tables, we make us the first four significant digits 4, 7, 3 and 7 from the extreme.

Thus $\log 473.725 = 2.6755$

Similarly we find

$\log 0.0257 = \bar{2}.4099.$

[Since there is one zero immediately after the dec point and the number is less than 1, the characteristic

The first significant digits of this number are 2,5 a ∴ The mantissa is looked up for these three digits].

Again, we find log 11·257=log 11·26 because the digit 7 is greater than 5 ∴ The previous digit 5 is corr to 6.

3.12 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳ ಉಪಯೋಗ.

(3·7), (3·8) ಮತ್ತು (3·9) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಣಾಕಾರ, ಭಾಗಹಾರ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ತಿಘಾತಗಳು ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಹಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಗಳಿಗೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬೇಕಾದ ಘಾತಕ್ಕೇರಿಸುವ, ಅಥವಾ ನರ ಬೇಕಾದ ಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಹಾರ ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತವೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಇಂಥ ಲೆಖ್ಖಾಚಾರಗಳು ತಿಘಾತಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಗೆ ಸಾಗುತ್ತವೆಂಬುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(1) ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :— $\dfrac{473 \cdot 725 \times 0 \cdot 0257}{11 \cdot 257}$

$x = \dfrac{473 \cdot 725 \times 0 \cdot 0257}{11 \cdot 257}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\log x = \log 473 \cdot 725 + \log 0 \cdot 0257 - \log 11 \cdot 257.$

$\log 473 \cdot 725$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು:—

ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಗಳಿವೆ. ∴ ಅದರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ರೂಪಾಂಕವು 2. ಅದರ ಶೇಷಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅದರ ಎಡತುದಿಯಿಂದ ಡದು ನಾಲ್ಕು ಗಣನೀಯ ಅಂಕಗಳಾದ 4,7,3,7ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ $\log 473 \cdot 725 = 2 \cdot 6755$

ನೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $\log 0 \cdot 0257 = \overline{2} \cdot 4099.$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದಲೂ. ಅದರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯವರೆಗೆ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯಿರುವುದರಿಂದಲೂ ಅದರ ಪ್ರತಿ ಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು $\overline{2}$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯವಾದ ಅಂಕಗಳು 5 ಮತ್ತು 7. ಇವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಶೇಷಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ.]

ನು, $\log 11 \cdot 257 = \log 11 \cdot 26$ ಎಂದು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ ; ಏಕೆಂದರೆ ಐದನೆಯ ಣನೀಯ ಅಂಕವಾದ 7 ಎಂಬುದು 5ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದುದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಂಕವಾದ ನ್ನು 6ಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದೆ.

$\therefore$ *log* 11.257 = *log* 11.26 = 1.0515

$\therefore$ *log* $x = \{(2.6755 + \bar{2}.4099 - 1.0515)\}$

$= \{2.6755 + (-2) + (0.4099) - 1.0515\}$ for $\bar{2} = -2$

$= (2.6755 + 0.4099) - (2 + 1.0515)$

$= 3.0854 - 3.0515.$

$= 0.0339$

Now we look up the tables of antilogarithms, and fin[d the number] whose logarithm is 0·0339

The figure we get for the mantissa of the logari[thm] 0·0339 from the tables of antilogarithms = 1081.

The characteristic of the logarithm = 0 $\therefore$ there m[ust] be one digit in the integral part of x.

$\therefore x = 1.081.$

Ex. (2) Evaluate :—

$$\sqrt[5]{\frac{3.1416 \times 72.02 \times (4.1)^3}{(53.2)^{\frac{1}{2}} \times (0.023)^2}}$$

$$\text{Let } x = \sqrt[5]{\frac{3.1416 \times 72.02 \times (4.1)^3}{(53.2)^{\frac{1}{2}} \times (0.023)^2}}$$

$$\therefore x^5 = \frac{3.1416 \times 72.02 \times (4.1)^3}{(53.2)^{\frac{1}{2}} \times (0.023)^2}$$

Taking logarithms on both sides,

$5 \log x = \log 3.1416 + \log 72.02 + 3 \log (4.1)$

$- \frac{1}{2} \log 53.2 - 2 \log (0.023)$

$= 0.4972 + 1.8574 + 3(0.6128)$

$- \frac{1}{2}(1.7259) - 2(\bar{2}.3617)$

$\therefore \log 11{\cdot}257 = \log 11{\cdot}26 = 1{\cdot}0515$

$\therefore \log x = \{2{\cdot}6755 + \bar{2}{\cdot}4099 - 1{\cdot}0515\}$

$= \{2{\cdot}6755 + (-2) + (0{\cdot}4099) - 1{\cdot}0515\}$

$\because \bar{2} = -2$

$= (2{\cdot}6755 + 0{\cdot}4099) - (2 + 1{\cdot}0515)$

$= 3{\cdot}0854 - 3{\cdot}0515$

$= 0{\cdot}0339$

ಈಗ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡಿ, 0·0339 ಎಂಬ ಶಾಂಕಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 1081 ನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 0 ಯಾಗಿದೆ. $\therefore x$ ನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕವಿರಬೇಕು.

$\therefore x = 1{\cdot}081$

<u>ದಾಹರಣೆ (2)</u>

$\sqrt[5]{\dfrac{3{\cdot}1416 \times 72{\cdot}02 \times (4{\cdot}1)^3}{(53{\cdot}2)^{\frac{1}{2}} \times (0{\cdot}023)^2}}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$x = \sqrt[5]{\dfrac{3{\cdot}1416 \times 72{\cdot}02 \times (4{\cdot}1)^3}{(53{\cdot}2)^{\frac{1}{2}} \times (0{\cdot}023)^2}}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore x^5 = \dfrac{3{\cdot}1416 \times 72{\cdot}02 \times (4{\cdot}1)^3}{(53{\cdot}2)^{\frac{1}{2}} \times (0{\cdot}023)^2}$

ಡು ಕಡೆಯೂ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$5 \log x = \log 3{\cdot}1416 + \log 72{\cdot}02 + 3 \log (4{\cdot}1)$

$-\frac{1}{2} \log 53{\cdot}2 - 2 \log (0{\cdot}023)$

$= 0{\cdot}4972 + 1{\cdot}8574 + 3\ (0{\cdot}6128)$

$- \frac{1}{2}\ (1{\cdot}7259) - 2(\bar{2}{\cdot}3617)$

$$=0.4972+1.8574+1.8384$$
$$-(0.8629)-(-4+0.7234)$$
$$=8.1930-1.5863$$
$$=6.6067$$
$$\therefore \log x=1.3213$$
$$\therefore x=20.95$$

Ex. (3) Solve, to two decimal places, the follo[w]
equation :—

$$5^{1-x}=6^{x-3}$$

Taking logarithms on both sides.

$$(1-x) \log 5=(x-3) \log 6.$$
$$\therefore \log 5+3 \log 6=x \log 6+x \log 5$$
$$\therefore \log 5+3 \log 6=x (\log 6+\log 5)$$
$$\therefore x=\frac{\log 5+3 \log 6}{\log 5+\log 6}$$
$$\log 5=0.6990$$
$$\log 6=0.7782$$
$$\therefore x=\frac{3.0336}{1.4772}=\frac{30336.}{14772}$$

Here we may directly divide and calculate x t[o] places of decimals or proceed to use logarithms. to the calculation . We shall adopt the latter proc[ess]. Accordingly, taking logarithms, we get

$$\log x=\log 30336-\log 14772$$
$$=4.4818-4.1694$$
$$=0.3124$$
$$\therefore x=\text{antilog } 0.3124$$
$$\therefore x=2.053$$

$= 0{\cdot}4972 + 1{\cdot}8574 + 1{\cdot}8384$

$\qquad - (0{\cdot}8629) - (-4 + 0.7234)$

$= 8{\cdot}1930 - 1{\cdot}5863$

$= 6{\cdot}6067$

$\therefore \log x = 1{\cdot}3213$

$\therefore x = 20{\cdot}95$

ಉದಾಹರಣೆ (3) ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣ ನ್ನ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$5^{1-x} = 6^{x-3}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$(1-x) \log 5 = (x-3) \log 6$$

$\log 5 + 3 \log 6 = x \log 6 + x \log 5$

$\log 5 + 3 \log 6 = x (\log 6 + \log 5)$

$x = \dfrac{\log 5 + 3 \log 6}{\log 5 + \log 6}$

$5 = 0{\cdot}6990$

$6 = 0{\cdot}7782$

$x = \dfrac{3.0336}{1.4772} = \dfrac{30336}{14772}$

ಇಲ್ಲಿ, ನೇರವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿ, x ನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ; ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಬಹುದು, ಈ ಡನೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೈಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಡರೆ,

$\log x = \log 30336 - \log 14772$

$\qquad = 4.4818 - 4.1694$

$\qquad = 0.3124$

$\therefore x = \text{antilog } 0.3124.$

$\therefore x = 2.053$

Ex. (4) Solve —

$$\begin{cases} 2^x = 3^y & (1) \\ 2^{y+1} = 3^{x-1} & (2) \end{cases}$$

Taking logarithms we get,

$$x\, log2 = y\, log3$$

$$\therefore\ x\, log2 - y\, log3 = 0. \qquad (3)$$

And $(y+1)\, log2 = (x-1)\, log\, 3$

$$\therefore\ x\, log3 - y\, log2 = log2 + log\ 3 \qquad (4)$$

$(3) \times (log\ 2)$ gives $x\, (log2)^2 - y\, (log2)\, (log3) = 0.$

$(4) \times (log3)$ gives $x\, (log3)^2 - y\, (log2)\, (log3) = log3(log2 + log$

Subtracting, we get

$$x[(log3)^2 - (log2)^2] = log3\ (log3 + log2).$$

$$\therefore\ x[log3 + log2][log3 - log2] = log3\ (log3 + log2).$$

$$\therefore\ x = \frac{log3}{log3 - log2} = \frac{0.4771}{0.4771 - 0.3010}$$

$$x = \frac{0.4771}{0.1761} = \frac{4771}{1761} \cdots\cdots \quad (5)$$

$$\therefore\ logx = log\ 4771 - log\ 1761$$

$$= 3.6786 - 3.2457$$

$$= 0.4329$$

$$\therefore\ x = \text{antilog}\ 0.4329 = 2.710$$

ಉದಾಹರಣೆ (4) ಬಿಡಿಸಿ : $\begin{cases} 2^x = 3^y \quad (1) \\ 2^{y+1} = 3^{x-1} \quad (2) \end{cases}$

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x \log 2 = y \log 3$$

$$\therefore \; x \log 2 - y \log 3 = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

ಮತ್ತು, $(y+1) \log 2 = (x-1) \log 3$

$$\therefore \; x \log 3 - y \log 2 = \log 2 + \log 3 \; \ldots (4)$$

$(3) \times (\log 2) : x (\log 2)^2 - y (\log 2)(\log 3) = 0$

$(4) \times (\log 3) : x (\log 3)^2 - y (\log 2)(\log 3) = \log 3 (\log 2 + \log 3)$

ಣುಲಾಗಿ

$$x \left[(\log 3)^2 - (\log 2)^2 \right] = \log 3 (\log 3 + \log 2)$$

$$\therefore x [\log 3 + \log 2] [\log 3 - \log 2] = \log 3 (\log 3 + \log 2)$$

$$\therefore x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \frac{0{\cdot}4771}{0{\cdot}4771 - 0{\cdot}3010}$$

$$x = \frac{0{\cdot}4771}{0{\cdot}1761} = \frac{4771}{1761}$$

$$\therefore \log x = \log 4771 - \log 1761$$

$$= \log 3{\cdot}6786 - 3{\cdot}2457$$

$$= 0{\cdot}4329$$

$$\therefore x = \text{antilog } 0{\cdot}4329 = 2{\cdot}710$$

Further, from (3). $x \log 2 = y \log 3$.

$$\therefore\ y = x\ \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{4771}{1761} \times \frac{0.3010}{0.4771} \text{ from (5)}$$

$$= \frac{3010}{1761}$$

$$\therefore\ \log y = \log\ 3010 - \log 1761$$

$$= 3.4786 - 3.2457$$

$$= 0.2329$$

$$\therefore\ y = \text{antilog } 0.2329 = 1.71$$

Thus the solution i

$$\left.\begin{array}{l} x = 2.71 \\ y = 1.71 \end{array}\right\} \text{approximately.}$$

3.13 Change of Base

If we have a system of logarithms to any base, we readily convert them to a system to any other bas follows :—

Given $\log_a N$, to find $\log_b N$.

Let $\log_b N = x \therefore N = b^x$.

Taking logarithms to base a on both sides.

$$\log_a N = x \log_a b$$

$$\therefore\ x = \boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (;$$

In particular, taking $b = 10$, and $a = e$, we have,

$$\log_{10} N = \log_e N \div \log_e 10.$$

ಂದೆ, (3) ರಿಂದ,

$$x \log 2 = y \log 3$$

$$\therefore y = x\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{4771}{1761} \times \frac{0.3010}{0{\cdot}4771}$$

$$= \frac{3010}{1761}$$

$$\therefore \log y = 3010 - \log 1761$$

$$= 3{\cdot}4786 - 3{\cdot}2467$$

$$= 0{\cdot}2329$$

$$\therefore y = \text{antilog } 0{\cdot}2329 = 1{\cdot}710$$

ಹೀಗೆ, $\left.\begin{array}{l} x = 2{\cdot}71 \\ y = 1{\cdot}71 \end{array}\right\}$ (ಸುಮಾರಾಗಿ)

.13 ಆಧಾರದ ಪರಿವರ್ತನೆ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಆಧಾರವನ್ನುನುಸರಿಸಿ ಗಣಿಸಿದ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ೇರೊಂದು ಆಧಾರಕ್ಕೆ, ಮುಂದೆಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ, ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

$\log_a N$ ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, $\log_b N$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

$\log_b N = x$ ಎಂದಿರಲಿ. $\therefore$ $N = b^x$.

ಎರಡುಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ a ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\log_a N = x \log_a b.$$

$$\therefore \quad x = \boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3{\cdot}10)$$

$b = 10$, $a = e$ ಆಗಿರುವ, ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ,

$\log_{10} N = \log_e N \div \log_e 10$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

Logarithms are generally calculated to base e, and th converted to the base 10, by multiplying $log_e N$, by the

called modulus $\frac{1}{log_e 10}$ =0.4343 (approximately).

Example :—(1) Prove that $log_a b . log_b a = 1$.

Converting each logarithm on L.H.S. to base 10 we hav

$$\text{L.H.S.} = \frac{log_{10}^b}{log_{10}^a} \times \frac{log_{10}^a}{log_{10}^b} = 1$$

Example :—(2) Find log_e^{16} given that $log_{10}e = 0.4343$.

$$\text{Now } log_e 16 = \frac{log_{10}16}{log_e 10} = \frac{1.2041}{0.4343} = \frac{12041}{4343} = x \text{ (sa}$$

$$\therefore log_{10}x = log\ 12041 - log\ 4343$$

$$= 4.0806 - 3.6378$$

$$= 0.4428$$

$$\therefore x = \text{antilog } 0.4428 = 2.772$$

$$\therefore log_e 16 = 2.772$$

Exercises 3.7

I. Evaluate the following expressions, using logarithms. to four place of decimals.

(1) 172.3×6.813

(2) $0.0275 \times (9.207)^2$

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಮೊದಲು e ಎಂಬ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಗಣಿಸಿ, ತರುವಾಯ $\log_e N$ ನ್ನು, ಪರಿವರ್ತಕಾಂಕವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವ $\frac{1}{\log_e 10} = 0.4343$ (ಸುಮಾರು) ರಿಂದ ಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ 10 ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಾರೆ.

<u>ಉದಾಹರಣೆ</u>:—(1) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ ಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳೆರಡನ್ನೂ, (3.10) ನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು 10ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\text{ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \times \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = 1$$

<u>ಉದಾಹರಣೆ</u>:—(2) $\log_{10} e = 0.4343$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರಲಾಗಿ, $\log_e 16$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಈಗ, } \log_e 16 = \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} e} = \frac{1.2041}{0.4343} = \frac{12041}{4343} = x \text{ (ಎಂದಿರಲಿ).}$$

$$\therefore \quad \log_{10} x = \log 12041 - \log 4343$$

$$= 4.0806 - 3.6378$$

$$= 0.4428$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog } 0.4428 = 2.772$$

$$\therefore \quad \log_e 16 = 2.772$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3·7

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಮುಂದಿನ ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಬೆಲೆಗಳನು ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) 172.3×6.813

(2) $0.0275 \times (9.207)^2$

(3) $\dfrac{3.456 \times 4.8321}{\sqrt[3]{89.64}}$.

(4) $\dfrac{2.1)^2 + (83.11)^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{3}(83.8)^2}{\sqrt[3]{(.08372)^2}}$

(5) $\sqrt[3]{3.78} \times \sqrt{10.8} \div \left(\sqrt[6]{1008} \times \sqrt[3]{486}\right.$

(6) $\dfrac{(27.36)^4 + (18.18)^4}{\sqrt{5577}}$ [*Hint.* Take logarithms each number and simpli

(7) $\dfrac{(20.25)^{\frac{2}{3}} - (2.012)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1277} - \sqrt{1088}}$

II. Solve the following equations correct to two decin places :—

(1) $39.7\,(x-3) = 1.293$

(2) $51.38\,(3x+2) = (4.217)^2$

(3) $(1.043)^x = 1.25$

(4) $3^x \times 2^{x+3} = 7^{x+1}$

(5) $7^{x-1}.\ 5^{2(x+1)} = 5^{3x}$

(6) $3^{x+3y} = 5$; $3^{2x-5y} = 7$.

(7) $2^{3x-2y} = 3$; $4^{2(x-y)} = 5$

(8) $5^x = 2^{-y}$; $5^{2+y} = 2^{2-x}$

(9) $2^x\, 5^y = 1$; $5^{x+1}\, 2^y = 2$

(3) $\dfrac{3{\cdot}456 \times 4{\cdot}8321}{\sqrt[3]{89{\cdot}64}}$

(4) $\dfrac{(2{\cdot}1)^2 \times (83{\cdot}11)^{\frac{1}{3}} \times (83{\cdot}8)^2}{\sqrt[3]{({\cdot}08372)^2}}$

(5) $\sqrt[3]{3{\cdot}78} \times \sqrt{10{\cdot}8} \div \left(\sqrt[6]{1008} \times \sqrt[3]{486} \right)$

(6) $\dfrac{(27{\cdot}36)^4 + (18{\cdot}18)^4}{\sqrt{5577}}$ [ಸೂಚನೆ—ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬೇಕು.]

(7) $\dfrac{(20.25)^{\frac{2}{3}} - (2.012)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1277} - \sqrt{1088}}$

II ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $39{\cdot}7\ (x-3) = 1.293$

(2) $51.38\ (3x+2) = (4.217)^2$

(3) $(1.043)^x = 1{\cdot}25$

(4) $3^x 2^{x+3} = 7^{x+1}$

(5) $7^{x-1}\ 5^{2(x+1)} = 5^{3x}$

(6) $3^{x+3y} = 5;\ \ 3^{2x-5y} = 7$

(7) $2^{3x-2y} = 3;\ \ 4^{2(x-y)} = 5$

(8) $5^x = 2^{-y}, 5^{2+y} = 2^{2-x}$

(9) $2^x\ 5^y = 1;\ \ 5^{x+1}\ 2^y = 2$

(10) $log_5 x + log_5 x^2 + log_5 x^3 = 3.$

III. Show that :—

(1) $log_4^{\,2} \times log_2^{\,3} = log_4^{\,5} \times log_5^{\,3}$

(2) $log_{b^a} .\ log_{c^b} .\ log_{a^c} = 1$

(3) $e = 10^{\left(\frac{1}{log_e 10}\right)}$

(4) If $log \frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{2}(loga + logb)$,

prove that $a = b$.

IV Find the number of digits in (1) 2^{85} (2)
(3) $3485^{\frac{7}{3}}$

V What is the least integral power of 2 which exce
a million ?

VI Calculate the volume of a solid cone, whose b
is a circle of diameter 8.68 cms, and height is 7.49 c
$(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h)$

VII Calculate the weight of a hollow iron ball in
form of a sphere of radius 6.9 cms, of thickness 0.3 c
given that the relative density of iron is 7.6.

VIII Given that $log_{10} e = 0.4343$, calculate the value

(*a*) $log_e 23$, $log_e 5{\cdot}7$, $log_e 77{\cdot}2$, $log_e 28{\cdot}01$, $log_e 11.21$

(*b*) Find (1) $log_2 43$ (2) $log_3 12.3$ (3) $log_5 4{\cdot}73$

(10) $\log_5 x + \log_5 x^2 + \log_5 x^3 = 3$

II ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ :

(1) $\log_4 2 \times \log_2 3 = \log_4 5 \times \log_5 3$

(2) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$

(3) $e = 10^{\left(\frac{1}{\log_e 10}\right)}$

(4) $\log\left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ಆದರೆ $a = b$.

IV ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿವೆ ?

(1) 2^{85}, (2) 12^{12}, (3) $(3485)^{\frac{7}{3}}$

V ಹತ್ತು ಲಕ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ 2 ರ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

VI 7.49 ಸೆಂ. ಮೀ. ಎತ್ತರವಾಗಿಯೂ, ತಳಭಾಗದ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು 8 ಸೆಂ. ಮೀ. ಆಗಿಯೂ ಇರುವ ಘನ ಶಂಖಾಕೃತಿಯ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಗಾತ್ರ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

VII 0.3 ಸೆಂ. ಮೀ. ದಪ್ಪವಾಗಿ, 6.9 ಸೆಂ. ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಗೋಳಾಕಾರವಾಗಿರುವ, ಟೊಳ್ಳಾದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಚೆಂಡಿನ ತೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಕಬ್ಬಿಣದ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಂದ್ರತೆ 7.6).

VIII $\log_{10} e = 0.4343$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ; ಇದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*a*) $\log_e 23$, $\log_e 5{\cdot}7$, $\log_e 77{\cdot}2$, $\log_e 28{\cdot}01$, $\log_e 11{\cdot}21$

(*b*) ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\log_2 43$, (2) $\log_3 12{\cdot}3$, (3) $\log_6 4{\cdot}73$.

CHAPTER 4

Quadratic Equations

(4.1) Linear Equations.— A linear equation in variable x can be put in the form

$$ax + b = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

where $a \neq 0$.

By a root of an equation is meant a value of the variab which satisfies the givene quation. For any pair of numbers a and b, the equation (1) has one and only one r

$$\text{Now } x = -\frac{a}{b}$$

is obviously a root of this equation.

To prove that (1) has only one root. let us assume α and β are two roots of (1).

$$\therefore \quad a\alpha + b = 0 \text{ and } a\,\beta + b = 0,$$

$$\therefore \quad a\alpha + b = a\,\beta + b,$$

$$\therefore \quad a\alpha = a\beta$$

Here $a \neq 0$. $\therefore$ Dividing by a,

$$\alpha = \beta$$

This shows that the equation (1) has one and only one and its value is $-\frac{b}{a}$

4.2 Solution of the quadratic equation— The ge quadratic equation in one variable can be written i form :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ldots\ldots \ (1) \text{ where } (a \neq 0).$$

Dividing by a.

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು

4.1 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು : x ಎಂಬ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$ax+b=0,\ a\neq 0 \qquad \ldots (1)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುಬಹುದು.

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುವ x ಚರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

a ಮತ್ತು bಗಳು ಯಾವ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ, ಸಮೀಕರಣ (1)ಕ್ಕೆ ಒಂದು, ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ.

$x=-\dfrac{b}{a}$ ಎಂಬುದು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ, α, β ಗಳು (1)ರ ಮೂಲಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$\therefore \quad a\alpha+b=0$, ಮತ್ತು $a\beta+b=0$

$\therefore \quad a\alpha+b=a\beta+b$

$\therefore \quad a\alpha=a\beta$

ಇಲ್ಲಿ $a\neq 0$. $\therefore$ a ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$\alpha=\beta$

ಇದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1)ಕ್ಕೆ ಒಂದು, ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದೂ, ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ಎಂದೂ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

4.2 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

ಏಕಚರಾಕ್ಷರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \ldots (1)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು : ಇಲ್ಲಿ $a\neq 0$. a ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ.

$$x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=0$$

Completing the square on the L.H.S.,

$$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Taking square roots on both sides,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Adding $-\frac{b}{2a}$ to both sides,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha, \text{ (say)}$$

$$\text{or} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \beta, \text{ (say)} \qquad \ldots\ldots (4.1$$

This shows that the equation (1) has two roots α an

To show that (1) can have only two roots, let us assu that γ is another root of (1).

Since α and β are roots of (1), by the remainder th rem, $(x-\alpha)$ and $(x-\beta)$ are factors of ax^2+bx+c.

$\therefore$ We may write $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore$ Equation (1) may be written as

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \ldots . (2)$$

Since γ is assumed as another root of (1), there

$$a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 0$$

Here $a \neq 0$ $\therefore$ Either $\gamma = \alpha$ or $\gamma = \beta$. *Thus it is seen a quadratic equation has two and only two roots.*

ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಪೂರಣಮಾಡುವುದರಿಂದ,

$$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲೂ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಡು ಕಡೆಗಳಗೂ $-\frac{b}{2a}$ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\therefore \ x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \ x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha, \text{ ಎಂದಿರಲಿ}$$

$$\text{ಅಥವಾ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \beta, \text{ ಎಂದಿರಲಿ} \qquad \ldots. (4{\cdot}1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ಕ್ಕೆ α ಮತ್ತು β ಎಂಬುವು ಮೂಲಗಳೆಂದು ಇದರಿಂದ ಕಾಣ ುತ್ತದೆ, ಸಮೀಕರಣ (1)ಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದು ೀರಿಸಲು, γ ಎಂಬುದೂ (1)ರ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಮತ್ತು βಗಳು (1)ರ ಮೂಲಗಳಾದುದರಿಂದ, ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ $-\alpha)$ ಮತ್ತು $(x-\beta)$ ಎಂಬುವು ax^2+bx+c ಎಂಬುದರ ಅಪವರ್ತನ ಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad ax^2+bx+c = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore$ ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು

$$a\,(x-\alpha)\,(x-\beta) = 0 \qquad \ldots (2)$$

ನು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ γ ಎಂಬುದು (1)ರ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವಾದು ುದ, $a\,(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta) = 0$

$a \neq 0. \quad \therefore \gamma = \alpha$ ಅಥವಾ $\gamma = \beta$ ಎಂದಿರಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ, ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮತ್ತು ಎರಡೇ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ, ನು ತೋರಿ ಬರುತ್ತದೆ.

4.3 The nature of the roots of quadratic equation

We have seen that the roots of the quadratic equatior $ax^2+bx+c=0$, are given by

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

We assume that a, b, c are real numbers, and that $a \neq 0$ Now the expression b^2-4ac may be positive, or negative o sometimes it may be equal to zero. If b^2-4ac is negative its square root is imaginary, and hence α, β are not rea We distinguish between the following cases :

Case (i) $b^2-4ac>0$. Then its square root exists as a re number. The above formula gives tw distinct values for α and β.

Case (ii) $b^2-4ac=0$. In this case, α and β are both equ to $-b/2a$. They are real, and coincident.

Case (iii) $b^2-4ac<0$. α and β are now imaginary.

The expression b^2-4ac is called the *discriminant* the quadratic ax^2+bx+c, for, it enables us to discrimina the nature of the roots of the quadratic equation.

We summarise the results.

(i) *Discriminant* > 0. *The roots are real and distinct.*

(ii) *Discriminant* $= 0$. *The roots are equal (and real).*

(iii) *Discriminant* < 0. *The roots are imaginary.*

In the last case, the numbers α and β are eviden conjugate complex numbers. For, if $b^2-4ac = -p$, t roots are

$$\alpha, \beta = -\frac{b \pm i\sqrt{p}}{2a}$$

4.3 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ, $a \neq 0$ ಎಂದೂ ಭಾವಿಸಿದರೆ b^2-4ac ಎಂಬ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯು ಧನವಾಗಿಯಾದರೂ, ಋಣವಾಗಿಯಾದರೂ, ಅಥವಾ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಯಾದರೂ ಇರಬಹುದು. b^2-4ac ಎಂಬುದು ಋಣವಾದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ,

<u>ಸಂದರ್ಭ (i)</u> $b^2-4ac>0$. ಆಗ ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವು α ಮತ್ತು β ಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

<u>ಸಂದರ್ಭ (ii)</u> $b^2-4ac=0$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ α ಮತ್ತು β ಗಳೆರಡೂ $-\dfrac{b}{2a}$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಅವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸಿರುತ್ತವೆ.

<u>ಸಂದರ್ಭ (iii)</u> $b^2-4ac<0$. α ಮತ್ತು βಗಳು ಈಗ ಊಹ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ,

b^2-4ac ಎಂಬ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ax^2+bx+c ಎಂಬ ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನದ <u>ಶೋಧಕ</u>ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಏಕೆಂದರೆ, ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಶೋಧಿಸಲು ಇದು ನೆರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) <u>ಶೋಧಕ >0.</u> ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

(ii) <u>ಶೋಧಕ $=0$.</u> ಮೂಲಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿಯೂ, (ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ) ಇರುತ್ತವೆ.

(iii) <u>ಶೋಧಕ <0.</u> ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಕಡೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, α ಮತ್ತು β ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುವರ್ತಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $b^2-4ac=-p$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ

ಮೂಲಗಳು, $\alpha, \beta = \dfrac{-b \pm i\sqrt{p}}{2a}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

We also observe that if a, b, c are all rational, and if b^2-4ac is positive and a perfect square, say n^2, then α and β are rational. We have

$$\alpha. \beta = -\frac{b \pm n}{2a}$$

which are rational numbers.

Examples :—

1 $x^2-5x+6=0$. Discriminant $= 25-24=1 \geqslant 0$
The roots are real and also rational. They are 2 and 3

2 $x^2-5x+5=0$. Discriminant $= 25-20>0$
$\therefore$ The roots are real, and distinct.

3 $4x^2-16x+16=0$. Discriminant $= 16^2-4.4.16=$

The roots are equal. The quadratic expression is perfect square, *viz.*, $4(x-2)^2$

4 $2x^2+x+3=0$. Discriminant $= 1-24<0$

The roots are imaginary.

4.4 Symmetric functions of the roots

A function $f(\alpha, \beta)$ is said to be *symmetric* in α and β if by interchanging α and β the value of $f(\alpha, \beta)$ is unaltered, *i.e.*, if $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.

e.g., $\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = \beta+\alpha \\ \alpha\beta = \beta\alpha \\ \alpha^2+\beta^2=\beta^2+\alpha^2 \end{array}\right\}$ $\therefore$ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^3$ are a symmetric function of α and β.

Now the equation $ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$
may be written as

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

a, b, c ಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, b^2-4ac ಯು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ, ಆಗ α, β ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$b^2-4ac=n^2$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $\alpha, \beta = \dfrac{-b\pm n}{2a}$. ಇವೆರಡೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $x^2-5x+6=0$. ಶೋಧಕ $=25-24=1>0$. ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಹಾಗೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಅವುಗಳಬೆಲೆಗಳು 2 ಮತ್ತು 3.

2 $x^2-5x+5=0$. ಶೋಧಕ $=25-20>0$.

$\therefore$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವು ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ.

3 $4x^2-16x+16=0$. ಶೋಧಕ $=16^2-4\cdot4\cdot16=0$. ಮೂಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನ. ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ. ಅದು $4(x-2)^2$ ಎಂದಿರುತ್ತದೆ.

4 $2x^2+x+3=0$. ಶೋಧಕ $=1-24<0$. ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿವೆ.

4·4 ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

α ಮತ್ತು βಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ $f(\alpha, \beta)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$ ಆದರೆ, $f(\alpha, \beta)$ನ್ನು α ಮತ್ತು β ಗಳ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha^2+\beta^2=\beta^2+\alpha^2$ $\therefore$ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ ಇವೆಲ್ಲವು α ಮತ್ತು β ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

ಈಗ $ax^2+bx+c=0$ . . . . (1) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ . . . . . . (2) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

If α and β are its roots. $(x-\alpha)$ and $(x-\beta)$ are factors of the L.H.S. of (2). $\therefore$ The equation (2) may also be written as $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$.

$$\therefore \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Comparing the equations (2) and (3), we find on equating corresponding coefficients,

$$\boxed{\alpha+\beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.2)$$

The combinations $\alpha+\beta$ and $\alpha\beta$ of the roots α and β are called elementary symmetric functions of the roots. It will be found that any symmetric polynomial in α and β can be expressed in terms of the elementary symmetric functions $\alpha+\beta$ and $\alpha\beta$.

4.5 To form the equation whose root are given.

If α is a root of an equation $f(x)=0$. by the Remainder Theorem, $(x-\alpha)$ is a factor of $f(x)$. Similarly. if β is a root $(x-\beta)$ is a factor. If $f(x)$ is a quadratic. there can be no other root. Hence $f(x)$ is equal to $(x-\alpha)(x-\beta)$ or a constant multiple of this. The required equation having α and β as roots is

$$\left.\boxed{\begin{array}{c} a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \\ \text{or} \\ x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0 \end{array}}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4.3)$$

More generally, if $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ are roots, the equation

$$\boxed{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)= 0} \quad \ldots (4.3$$

α ಮತ್ತು β ಗಳು ಅದರ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $(x-\alpha)$ ಮತ್ತು $(x-\beta)$ ಎಂಬುವು (2)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ∴ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು

$$(x-\alpha)\ (x-\beta)=0 \text{ ಅಥವಾ}$$

$x^2-(\alpha+\beta)\ x+\alpha\beta=0$ . . . . (3) ಎಂದು ಬರೆಯ ಬಹುದು. (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಅನುರೂಪ ಗುಣಕ ಗಳನ್ನು ಸಮಾನಗೊಳಿಸಿದರೆ'

$$\boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}} \cdots\cdots\ (4.2)$$ ಎಂಬವು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

α ಮತ್ತು β ಎಂಬ ಮೂಲಗಳ $\alpha+\beta$ ಮತ್ತು $\alpha\beta$ ಎಂಬ ಸಂಯೋಜನೆ ಗಳನ್ನು, ಮೂಲಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. α ಮತ್ತು β ಗಳ ಯಾವ ಸಮಾಂಗ ಬಹುಪದಿಯನ್ನಾಗಲೀ, $\alpha+\beta$ ಮತ್ತು $\alpha\beta$ ಎಂಬ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅನುರೂಪ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಾಣಬರುತ್ತದೆ.

4.5 ದತ್ತಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ರಚನೆ

$f(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ α ಎಂಬುದು ಮೂಲವಾದಲ್ಲಿ, ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, $(x-\alpha)$ ಎಂಬುದು $f\ (x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, β ಎಂಬುದು ಮೂಲವಾದರೆ, $(x-\beta)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ವಾಗುತ್ತದೆ. $f\ (x)$ ಒಂದು ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, $f\ (x)$ ಎಂಬುದು $(x-\alpha)\ (x-\beta)$ ಗೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$$\boxed{\begin{gathered} a\ (x-\alpha)\ \ (x-\beta)=0 \\ \text{ಅಥವಾ} \\ x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0 \end{gathered}} \quad \cdots\cdots\ (4.3)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $\alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ldots\ \alpha_n$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\boxed{a\ (x-\alpha_1)\ \ (x-\alpha_2)\ \ldots\ldots\ (x-\alpha_n)\ =\ 0} \cdots (4.3a)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

Examples—

(1) Form the equation whose roots are $2+\sqrt{3}$ and $2-\sqrt{3}$.

The equation whose roots are α and β is

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

$$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$$

Here $\alpha+\beta = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

$$\alpha\beta = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$$

$\therefore$ the required equation is

$$x^2-4x+1=0$$

(2) Form the equation whose roots are

$$\frac{2-i\sqrt{3}}{5} \text{ and } \frac{2+i\sqrt{3}}{5}$$

The required equation is

$$\left(x-\frac{2-i\sqrt{3}}{5}\right)\left(x-\frac{2+i\sqrt{3}}{5}\right)=0$$

$$\therefore \left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{5}\right\}\left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{5}\right\}=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{3}{25}=0$$

$$\therefore x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{3}{25}=0$$

$$\therefore 25x^2-20x+7=0$$

(3) Find a in order that the roots of the equation $4x^2-20ax+1=0$ may differ by 7.

If α, β are the roots, then

$$\alpha+\beta = \frac{20a}{4} = 5a;\quad \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

and $\alpha-\beta=7$

$$\therefore\ 2\alpha=5a+7$$

$$2\beta=5a-7$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2-\sqrt{3}$ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣರಚಿಸಿರಿ.

α ಮತ್ತು βಗಳ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ ಎಂದಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha+\beta = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

$\alpha\beta = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2-4x+1=0$$

(2) $\dfrac{2-i\sqrt{3}}{5}$ ಮತ್ತು $\dfrac{+i\sqrt{3}}{5}$ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರ-
ವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು $\left(x-\dfrac{2-i\sqrt{3}}{5}\right)\left(x-\dfrac{2+i\sqrt{3}}{5}\right)=0$

$$\therefore \left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{5}\right\}\left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{5}\right\}=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{3}{25}=0$$

$$\therefore x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{3}{25}=0$$

$$\therefore 25x^2-20x+7=0$$

(3) $4x^2-20ax+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗ-
ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 7 ಆಗುವಂತೆ, a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿರಿ.

ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಎಂದಾದರೆ, $\alpha+\beta = \dfrac{20a}{4} = 5a$

$\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\alpha-\beta = 7$

$\therefore \quad 2\alpha = 5a+7$

$2\beta = 5a-7$

$\therefore \quad 4\alpha\beta = 25a^2 - 49$

But $4\alpha\beta = 1$

$\therefore \quad 25a^2 - 49 = 1$

$\therefore \quad 25a^2 = 50$

$\therefore \quad a^2 = 2$

$\therefore \quad a = \pm\sqrt{2}$

(4) Find the relation between p, q and r in order that the equation $px^2 + qx + r = 0$ may have one root double the other.

If α and β be its roots,

$\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ and $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

Let $\alpha = 2\beta \quad \therefore \quad \alpha + \beta = 3\beta = -\frac{q}{p} \quad \therefore \quad \beta = -\frac{q}{3p}$

$$\text{And } \alpha\beta = 2\beta^2 = \frac{r}{p}$$

$$\therefore \quad 2\left(-\frac{q}{3p}\right)^2 = \frac{r}{p}$$

$\therefore \quad 2q^2p = 9p^2r$

Here $p \neq 0$, for the given equation is quadratic on dividing by p,

$2q^2 = 9pr$. This is the required condition.

(5) If α and β are the roots of the equation

$$x^2 - qx + r = 0,$$

find the values of

(i) $\alpha^2 + \beta^2$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

(iv) $\frac{1}{\alpha + 2\beta} + \frac{1}{\beta + 2\alpha}$

Now $\alpha + \beta = q, \quad \alpha\beta = r$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = q^2 - 2r$

$\therefore \quad 4\alpha\beta = 25a^2 - 49$ ಆದರೆ $4\alpha\beta = 1$

$\therefore \quad 1 = 25a^2 - 49$

$\therefore \quad 25a^2 = 50$

$\therefore \quad a^2 = 2$

$\therefore \quad a = \pm\sqrt{2}$

(4) $px^2 + qx + r = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿರಬೇಕಾದರೆ, p, q ಮತ್ತು r ಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

α ಮತ್ತು β ಗಳು ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\alpha + \beta = -\dfrac{q}{p}$, ಮತ್ತು

$\alpha\beta = \dfrac{r}{p}$, $\quad \alpha = 2\beta$ ಎಂದಿರಲಿ, $\quad \therefore \quad \alpha + \beta = 3\beta = -\dfrac{q}{p}$

$\therefore \beta = -\dfrac{q}{3p}$, ಮತ್ತು $\alpha\beta = 2\beta^2 = \dfrac{r}{p}$

$$\therefore 2\left(-\frac{q}{3p}\right)^2 = \frac{r}{p}$$

$\therefore 2q^2 p = 9p^2 r$

ಇಲ್ಲಿ $p \neq 0$, ಏಕೆಂದರೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ. p ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $2q^2 = 9pr$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಬೇಕಾದ ಸಂಬಂಧ.

(5) α, βಗಳು $x^2 - qx + r = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ $\qquad$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha}$ $\qquad$ (iv) $\dfrac{1}{\alpha + 2\beta} + \dfrac{1}{\beta + 2\alpha}$

ಈಗ $\alpha + \beta = q$, ಮತ್ತು $\alpha\beta = r$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = q^2 - 2r$

(ii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta\ (\alpha+\beta) = (q)^3-3\ (r)\ (q)$
$$= q^3-3qr$$

(iii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}$

To find the value of $\alpha^4+\beta^4$ we write
$$\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\ \alpha^2\beta^2$$

Using the value of $\alpha^2+\beta^2$ determined in (i), we get
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha^2\beta)^2=(q^2-2r)^2-2(r)^2$$
$$= q^4-4q^2r+2r^2$$

$$\therefore\ \frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha} = \frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta} = \left\{\frac{q^4-4q^2r+2r^2}{r}\right\}$$

(iv) $\dfrac{1}{\alpha+2\beta} + \dfrac{1}{\beta+2\alpha} = \dfrac{\beta+2\alpha + \alpha+2\beta}{(\alpha+2\beta)\ (\beta+2\alpha)}$

The numerator $= 3(\alpha+\beta) = 3q$

The denominator $= \alpha\beta+2\beta^2+2\alpha^2+4\alpha\beta$
$$= 5\alpha\beta+2\ (\alpha^2+\beta^2) = 5\alpha\beta+2\ \{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$= 5r+2\ \{q^2-2r\}$$
$$= \{5r+2q^2-4r\}$$
$$= 2q^2+r$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha} = \frac{3q}{2q^2+r}$$

(6) If α and β are the roots of the equation $x^2+lx+m=0$ find the equation whose roots are

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \quad\text{and}\quad \beta + \frac{1}{\beta}$$

Put $\alpha'=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ and $\beta'=\beta+\dfrac{1}{\beta}$

$$\therefore\quad \alpha'+\beta'=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{(\beta+\alpha)}{\alpha\beta}= (\alpha+\beta)\left[1+\frac{1}{\alpha\beta}\right]$$

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta\ (\alpha+\beta)=(q)^3-3(r)\ (q)$
$=q^3-3qr$

(iii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}$

$(\alpha^4+\beta^4)$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,
$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ, ಹಿಂದೆ (i)ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ $(\alpha^2+\beta^2)$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\alpha^4+\beta^4=(q^2-2r)^2-2\ (r)^2=q^4-4q^2r+2r^2$$

$$\therefore\ \frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left\{\frac{q^4-4\ q^2\ r+2r^2}{r}\right\}$$

(iv) $\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{\beta+2\alpha+\alpha+2\beta}{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}$

ಅಂಶ $=3\ (\alpha+\beta)=3q$

ಛೇದ $=\alpha\beta+2\beta^2+2\alpha^2+4\alpha\beta=5\ \alpha\beta+2\ \{\alpha^2+\beta^2\}$
$=5\ \alpha\beta+2\ \{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$
$=5r+2\ \{q^2-2r\}$
$=5r+2q^2-4r$
$=2q^2+r$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{3q}{2q^2+r}$$

(6) α ಮತ್ತು β ಎಂಬುವು $x^2+l\,x+m=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ ಮತ್ತು $\beta+\frac{1}{\beta}$ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\alpha'=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ ಮತ್ತು $\beta'=\beta+\frac{1}{\beta}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ \alpha'+\beta'=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\alpha}=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left[1+\frac{1}{\alpha\beta}\right]$$

But $\alpha+\beta=-l, \quad \alpha\beta=m$

$$\therefore \alpha'+\beta'=(-l)\left[1+\frac{1}{m}\right]=-\frac{l}{m}\quad[m+1]$$

$$\text{Again, } \alpha'\beta'=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\right)+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$$

$$\text{Now } \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-l)^2-2m=l^2-2m$$

$$\therefore \alpha'\beta'=m+\frac{1}{m}+\frac{l^2-2m}{m}=\frac{1}{m}\quad[m^2+1+l^2-2m]$$

$$=\frac{1}{m}\ [(m-1)^2+l^2]$$

Now the equation, whose roots are α' and β', is give by

$$x^2-(\alpha'+\beta')x+\alpha'\beta'=0$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{l}{m}[m+1]\,x+\frac{1}{m}[(m-1)^2+l^2]=0$$

$$\therefore \quad mx^2+l(m+1)x+[(m-1)^2+l^2]=0$$

(7) Show that the roots of the equation

$$(q^2-pr)x^2+2(p+r)\,x-4=0$$

are always real for real values of p, q and r.

The discriminant of the given equation is

$$4\,(p+r)^2-4(-4)\,(q^2-pr)$$

$$=4\,\{(p+r)^2+4(q^2-pr)\}=4\,\{p^2+r^2-2pr+4q$$

$$=4\{(p-r)^2+4q^2\}$$

Which is non-negative for all values of p, q and r.

$\therefore$ The roots of the given equation are always real.

ಆದರೆ, $\alpha+\beta=-l$ ಮತ್ತು $\alpha\beta=m$

$$\therefore\ \alpha'+\beta'=(-l)\left[1+\frac{1}{m}\right]=-\frac{l}{m}[m+1]$$

ಪುನಃ, $\alpha'\beta'=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\right)+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

$$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$$

ಈಗ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-l)^2-2m=l^2-2m$

$$\therefore\ \alpha'\beta'=m+\frac{1}{m}+\frac{l^2-2m}{m}=\frac{1}{m}[m^2+1+l^2-2m]$$

$$=\frac{1}{m}[(m-1)^2+l^2]$$

ಈಗ, α' ಮತ್ತು β' ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2-(\alpha'+\beta')x+\alpha'\beta'=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ x^2+\frac{l}{m}[m+1]x+\frac{1}{m}[(m-1)^2+l^2]=0$$

$$\therefore\ mx^2+l(m+1)x+[(m-1)^2+l^2]=0$$

(7) p, q, r ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

$(q^2-pr)x^2+2(p+r)x-4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು

$4(p+r)^2-4(-4)(q^2-pr)$

$=4\{(p+r)^2+4(q^2-pr)\}=4\{(p^2+r^2-2pr+4q^2\}$

$=4\{(p-r)^2+4q^2\}$ ಇದು p, q, r ಗಳ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$\therefore$ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4.6 Zero and Infinite Roots

1 If one of the roots of the equation

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots \text{(1)}$$

is zero, then $x=0$ satisfies the equation.

$$\therefore \quad c=0$$

$\therefore$ The equation becomes $ax^2+bx=0$

$$\therefore \ x\ (ax+b)=0$$

$\therefore$ $x=0$ or $ax+b=0$. *i.e.*, $x=-\frac{b}{a}$

The other root $-\frac{b}{a}$ will also be zero if and only if $b=0$

$\therefore$ The conditions that both the roots of (1) be zero are $b=0$ and $c=0$

2 *To find the condition that the roots of the equation* $ax^2+bx+c=0$ *be infinite.*

Let us put $x=\frac{1}{y}$ in this equation. We set

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0$$

or $$cy^2+by+a=0 \quad \ldots \text{(2)}$$

Now, if $y=0$, x is infinite.

The condition that (2) may have one zero root is that $a=0$.

$\therefore$ equation (1) will have one root infinite if $a=0$.

Again equation (2) will have both its roots equal to zero of $b=0$, and $a=0$.

$\therefore$ Equation (1) will have both its roots infinite i $b=0$ and $a=0$.

4·6 ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಅನಂತ ಮೂಲಗಳು

(1) $ax^2+bx+c=0$............... (1)

ಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, $x=0$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore c=0$. ಈಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2+bx=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore x(ax+b)=0$

$x=0$ ಅಥವಾ $ax+b=0$, ಎಂದರೆ, $x=-\frac{b}{a}$. ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವಾದ $\frac{b}{a}$ಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ $b=0$ ಆಗಬೇಕು, ಮತ್ತು $b=0$ ಆದರೆ, ಡನೆಯ ಮೂಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಂದರೆ $b=0$ ಮತ್ತು $c=0$.

(2) $ax^2+bx+c=0$............(1) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಂತವಾಗಲು ಇರುವ ನಿರ್ಬಂಧ.

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x=\frac{1}{y}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0$$

ಅಥವಾ $cy^2+by+a=0$ ....(2) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore y=0$ ಆದರೆ, x ಎಂಬುದು ಅನಂತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಮೂಲವು 0 ಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, $a=0$ ಆಗ ು. $\therefore$ ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಮೂಲವು ಅನಂತವಾಗಬೇಕಾದರೆ, 0 ಎಂದಾಗಬೇಕು.

ಮತ್ತೆ ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, 0, ಮತ್ತು $a=0$ ಆಗಬೇಕು.

ಆಗ (1)ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore$ ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಅನಂತವಾಗಿರಬೇಕಾದಲ್ಲಿ, 0 ಮತ್ತು $a=0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿರಬೇಕು.

4.7 Conditions that two quadratic equations may have common roots

(*a*) To find the condition that the equations

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

and

$$a'x^2+b'x+c'=0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

may have both the roots in common.

If α and β are the roots, then since they are roots [of] equations (1) and (2),

we have $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b'}{a'}$

and $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c'}{a'}$

$\therefore$ $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}}$ These are the requir[ed] conditions.

(*b*) To find the condition that the equations (1) and (2) may have one root in common.

Let α be the common root.

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$$

Solve for α^2 and α.

We have $ab'\alpha^2+bb'\alpha+cb'=0$

$$a'b\alpha^2+bb'\alpha+bc'=0$$

$$\therefore\quad (ab'-a'b)\alpha^2+(b'c-bc')=0$$

$$\therefore\quad \alpha^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$$

Next, $aa'\alpha^2+ba'\alpha+ca'=0$

$$aa'\alpha^2+ab'\alpha+ac'=0$$

4·7 ಎರಡು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲಗಳಿರಲು ನಿರ್ಬಂಧಗಳು

(a) $ax^2+bx+c=0$........(1) ಮತ್ತು

$a'x^2+b'x+c'=0$........(2) ಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಮಾನ್ಯವಾಗಲು ಇರುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, ಇವೆರಡು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ೂಲಗಳಾದುದರಿಂದ,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$$ ಇವೇ ಬೇಕಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು

(b) ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಲು ಇರುವ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವು α ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$$

ಇಲ್ಲಿಂದ, α^2 ಮತ್ತು α ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಈಗ $ab'\alpha^2+bb'\alpha+cb'=0$

$a'b\alpha^2+bb'\alpha+bc'=0$

$$\therefore\ (a\,b'-a'\,b)\,\alpha^2+(b'c-bc')=0$$

$$\therefore\ \alpha^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

,, $a\,a'\alpha^2+b\,a'\alpha+c\,a'=0$

$a\,a'\alpha^2+a\,b'\alpha+a\,c'=0$

$\therefore \quad (a'b-ab')\alpha+(ca'-c'a)=0$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

$$\therefore \quad \alpha^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2$$

Or

$\boxed{(bc'-b'c)\ (ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2}$ This is th

required condition.

[The student who is familiar with the cross-rule meth of writing down the roots of two simultaneous equati can write down the values of α^2 and α directly.]

EXERCISES 4.1

1 Write down the discriminants of the follow equations, and find the nature of their roots.

(1) $x^2+x+1=0$ (4) $5x^2-3x+4=0$

(2) $x^2-x+1=0$ (5) $ax^2+2ax+1=0$

(3) $x^2-6x+8=0$ (6) $(a+b)x^2-(a+b)x+1=$

2 Form the equations whose roots are :

(1) 7 and -4

(2) $2\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{2}$

(3) $4a$ and $7/b$

(4) $\dfrac{7-\sqrt{2}}{2}$ and $\dfrac{7+\sqrt{2}}{2}$

(5) $\dfrac{1-i}{3}$ and $\dfrac{1+i}{3}$

(6) $\dfrac{3+i\sqrt{2}}{3}$ and $\dfrac{3-i\sqrt{2}}{3}$

3 Find the condition that :

(1) the equation $2x^2-5bx+4=0$ may have e roots.

$$\therefore \quad (a'b - a\,b')\alpha + (c\,a' - c'a) = 0$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{c\,a' - c'a}{a\,b' - a'b}$$

$$\therefore \quad \alpha^2 = \frac{b\,c' - b'c}{-\ \ 'b} = \left(\frac{c\,a' - c'a}{a\,b' - a'b}\right)^2$$

ಅಥವಾ,

$$\boxed{(b\,c' - b'c)\ (a\,b' - a'b) = (c\,a' - c'a)^2}$$

ಇದೇ ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ.

[ಎರಡು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಓರೆ-ಗೆರೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು α^2 ಮತ್ತು α ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಬರೆದು ಬಿಡಬಹುದು.]

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1 ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಶೋಧಕಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $x^2 + x + 1 = 0$ (2) $x^2 - x + 1 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (4) $5x^2 - 3x + 4 = 0$

(5) $ax^2 + 2ax + 1 = 0$ (6) $(a+b)x^2 - (a+b)x + 1 = 0$

2 ಇವುಗಳು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(1) 7 ಮತ್ತು -4 (2) $2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $2\frac{1}{2}$

(3) $4a$ ಮತ್ತು $\frac{7}{b}$ (4) $\frac{7-\sqrt{2}}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$

(5) $\frac{1-i}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1+i}{3}$ (6) $\frac{3+i\sqrt{2}}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3-i\sqrt{2}}{3}$

3 ಮುಂದಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂಥ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $2x^2 - 5bx + 4 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾಗಿರ ಬೇಕು.

(2) the sum of the roots of the equation $x^2-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ be 6.

(3) one root of the equation $2x^2-bx+3a=0$ may be double the other.

(4) the sum of the roots of the equation $3x^2-\lambda x-5=0$ may exceed their product by 3.

(5) the ratio of the roots of the equation $x^2-qx+r=0$ may be as 3 : 5.

4 If α, β are the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ find the values of

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (2) $\alpha^2-\beta^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$ (4) $\alpha^3-\beta^3$,

(5) $\alpha^6+\beta^6$ (6) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

5 If α, β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$ form the equations whose roots are

(1) α^2, β^2 (2) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (3) $\alpha+h, \beta+h$

(4) $k\alpha, k\beta$ (5) $3\alpha+\beta, 3\beta+\alpha$ (6) $\dfrac{1}{2\alpha+\beta}, \dfrac{1}{2\beta+\alpha}$

(7) $\dfrac{2\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}, \dfrac{2\beta-\alpha}{2\beta+\alpha}$ (8) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}, \beta^2+\dfrac{1}{\beta^2}$

(9) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha}{\beta^2}$ (10) $1+\dfrac{1}{3\alpha+\beta}, 1+\dfrac{1}{3\beta+\alpha}$

6. Show that (1) the roots of the equation $x^2-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ are rational if a and b are rational.

(2) the equation $2x^2-2(p+q)x+p^2+q^2=0$ cannot have real roots unless $p=q$.

(2) $x^2-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಮೊತ್ತವು 6 ಆಗಿರಬೇಕು.

(3) $2x^2-bx+3a=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು ನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿರಬೇಕು.

(4) $3x^2-\lambda x-5=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅವುಗಳ ಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ 3 ಅಧಿಕವಾಗಿರಬೇಕು.

(5) $x^2-qx+r=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 3:5 ಆಗಿರ ಕು.

4. α ಮತ್ತು βಗಳು $ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಾಗಿದ್ದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (2) $\alpha^2-\beta^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3$

(4) $\alpha^3-\beta^3$ (5) $\alpha^6+\beta^6$ (6) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

5 α ಮತ್ತು βಗಳು $x^2-px+q=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾ), ಇವುಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ :

(1) α^2, β^2 (2) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (3) $\alpha+h, \beta+h$

) $k\alpha, k\beta$ (5) $3\alpha+\beta, 3\beta+\alpha$ (6) $\dfrac{1}{2\alpha+\beta}, \dfrac{1}{2\beta+\alpha}$

) $\dfrac{2\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}, \dfrac{2\beta-\alpha}{2\beta+\alpha}$ (8) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}, \beta^2+\dfrac{1}{\beta^2}$

) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha}{\beta^2}$ (10) $1+\dfrac{1}{3\alpha+\beta}, 1+\dfrac{1}{3\beta+\alpha}$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:—

(1) a ಮತ್ತು bಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಖ್ಯೆಗಳು.

(2) $2x^2-2(p+q)x+p^2+q^2=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ು $p=q$ ಆಗಿದ್ದ ಹೊರತು, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(3) if a and b are rational, the roots of the equati

$$(a^2-b^2)\ x^2+2\ (a^2+b^2)\ x+(a^2-b^2)=0$$

are rational. Are they always rational if a and b are rea

(4) the roots of the equation $(q^2-pr)x^2+2(p+r)x-4=0$ are always real for real val of p, q and r.

(5) the roots of the equation $(x-1)\ (x-3)-k(x-2)\ (x-3)=0$ are real for all values o

7 Show that if the roots of the equation

$$(a^2+b^2)\ x^2+2\ (ac+bd)\ x+c^2+d^2=0$$

are real, they will be equal, and find these equal roots

8 Prove that the roots of the following equati are real :

(1) $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$

(2) $(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$

9 Show that the equations $x^2+ax+b=0$ $x^2+bx+a=0$ will have a common root if either $a=b$ $a+b+1=0$.

10 If the equations $x^2+px+q=0$, and $x^2+p'x+q'=0$ have a common root, show that it must equal to either

$$\frac{pq'-p'q}{q-q'} \text{ or } \frac{q-q'}{p'-p}$$

11 If the equations $x^2+ax+10=0$, and $x^2+bx-10$ have a common root, prove that $a^2-b^2=40$.

12 Find the condition that one of the roots of equations $x^2-ax+b=0$ may be double one of the r of the equation $x^2-px+q=0$.

(3) a ಮತ್ತು bಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

$(a^2-b^2)x^2 + 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. (a, bಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಮೂಲಗಳಂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆಯೇ ?)

(4) $(q^2-pr)x^2 + 2(p+r)x-4 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು p, q, rಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗಲೆಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(5) k ಎಂಬುದರ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ,

$(x-1)\ (x-3)-k(x-2)(x-3)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

7 $(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+c^2+d^2=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸಮಾನವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಅವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8 ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

(1) $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$

(2) $(a-b+c)\ x^2+4\ (a-b)\ x+(a-b-c)=0$

9 $a=b$ ಅಥವಾ $a+b+1=0$ ಆದಾಗ, $x^2+ax+b=0$ ಮತ್ತು $x^2+bx+a=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10 $x^2+px+q=0$ ಮತ್ತು $x^2+p'x+q'=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಿದ್ದರೆ, ಅದು $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ ಅಥವಾ $\frac{q-q'}{p'-p}$ ಗೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11 $x^2+ax+10=0$ ಮತ್ತು $x^2+bx-10=0$ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಿದ್ದರೆ, $a^2-b^2=40$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 $x^2-ax+b=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲೊಂದು $x^2-px+q=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿರಬೇಕಾದರೆ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4.8 The Quadratic Function

1 We have so far discussed the quadratic *equation* $ax^2+bx+c=0$. x here corresponds to *only two* values, *viz.*, the roots of this equation. We now study the quadratic *function*, $y=ax^2+bx+c$.

By the notion of a function, x here can take *any* value, and we study properties of the corresponding value of y. This we do by the help of the roots of the *equation* $ax^2+bx+c=0$. Let the roots be denoted by α and β as before. Therefore $x-\alpha$ and $x-\beta$ are factors of the *function* ax^2+bx+c. Hence

$$y=ax^2+bx+c=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$$

We now discuss various possibilities.

Case I. α and β are real, and unequal. We can suppose that $\alpha<\beta$.

(i) *When* $a>0$. For any value of $x<\alpha$, both the factors $x-\alpha$ and $x-\beta$ are negative. Hence y is positive.

Similarly for any value of $x>\beta$, both the factors $x-\alpha$ and $x-\beta$ are >0, and hence $y>0$.

When x lies between α and β (we write this as $\alpha<x<\beta$), $x-\alpha$ is positive, but $x-\beta$ is negative.

$$\therefore\ y<0$$

y is zero when $x=\alpha$ and when $x=\beta$. y goes on increasing, when x goes on increasing, and $x>\beta$. Similarly when y goes on increasing, and $x<\alpha$.

4.8 ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನ

ಇದುವರೆಗೆ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾದ $ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. xಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು. ಈಗ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾದ $y=ax^2+bx+c$ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಭಾವನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಇಲ್ಲಿ xಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ಕೊಡಬಹುದು, ಅದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ y ಬೆಲೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು α, β ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ$x-\alpha$ ಮತ್ತು $x-\beta$ ಎಂಬವು ax^2+bx+c ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಪವರ್ತನ ಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ಈಗ ನಾನಾ ವಿಧದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸುವೆವು.

ಸಂದರ್ಭ I: α, βಗಳು ವಾಸ್ತವ ಹಾಗೂ ಅಸಮಾನ. $\alpha<\beta$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(i) $a>0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ. $x<\alpha$ ಆಗಿರುವ xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾಗಲಿ $x-\alpha$ ಮತ್ತು $x-\beta$ ಎಂಬ ಎರಡೂ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ y ಧನ.

ಇದರಂತೆಯೇ $x>\beta$ ಆಗಿರುವ xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೇ ಆಗಲಿ $x-\alpha$ ಮತ್ತು $x-\beta$ ಎಂಬ ಎರಡೂ ಅಪವರ್ತನಗಳು >0, ಆದ್ದರಿಂದ $y>0$.

α ಮತ್ತು βಗಳ ನಡುವೆ x ಇರುವಾಗ (ಇದನ್ನು $\alpha<x<\beta$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ), $x-\alpha$ ಧನ, ಆದರೆ $x-\beta$ ಋಣ $\therefore y<0$.

$x=\alpha$ ಮತ್ತು $x=\beta$ ಆದಾಗ, y ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $x>\beta$ ಆಗಿದ್ದು, x ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಹಾಗೆಲಾ, yಯೂ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಇದರಂತೆಯೇ, $x<\alpha$ ಆದಾಗ, y ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

These data enable us to draw the curve (*i.e.*, obtain its shape and position) $y=ax^2+bx+c$. The curve is shown in Fig. (4.1)

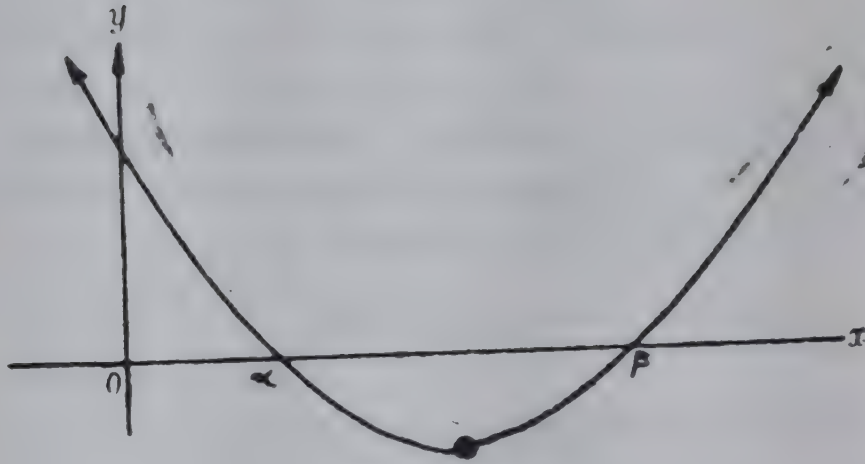


Fig. 4.1



Fig. 4.2

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ $y=ax^2+bx+c$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲು (ಎಂದರೆ ಅದರ ಆಕಾರ, ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು) ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಯನ್ನು ಚಿತ್ರ (4·1) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

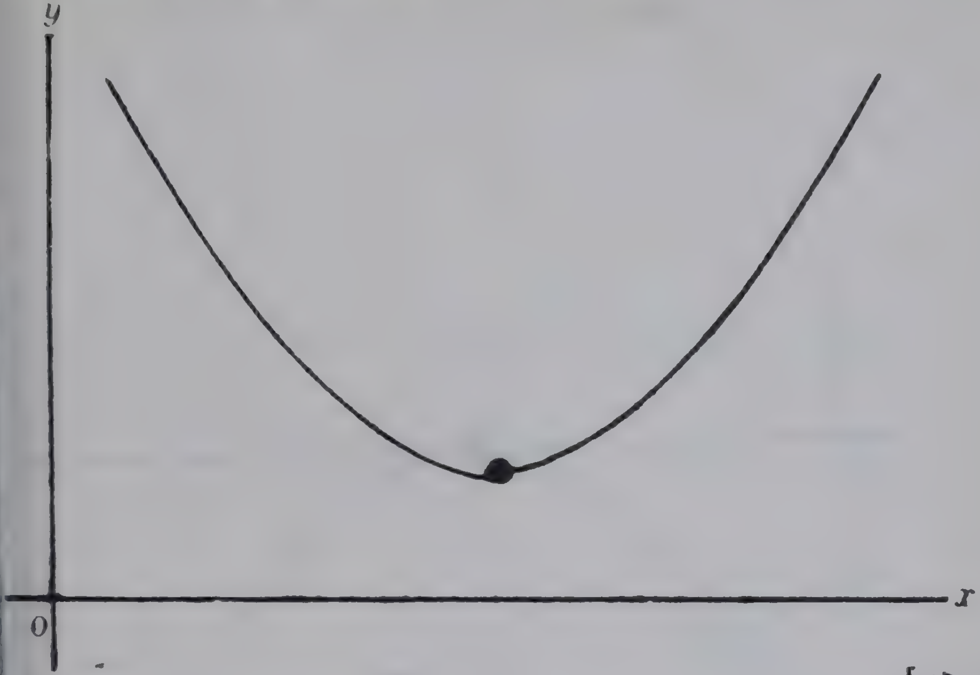


Fig. 4.3 [$a>0$]



Fig. 4.4 [$a<0$]



Fig. 4.5

We note that the *quadratic function* ax^2+bx
$(a>0)$ *is negative when x lies between the roots* α and, β
is positive for all other values of x.

(ii) *When* $a<0$, all the above results are revers
and the graph of the function is as in fig. 4.4.

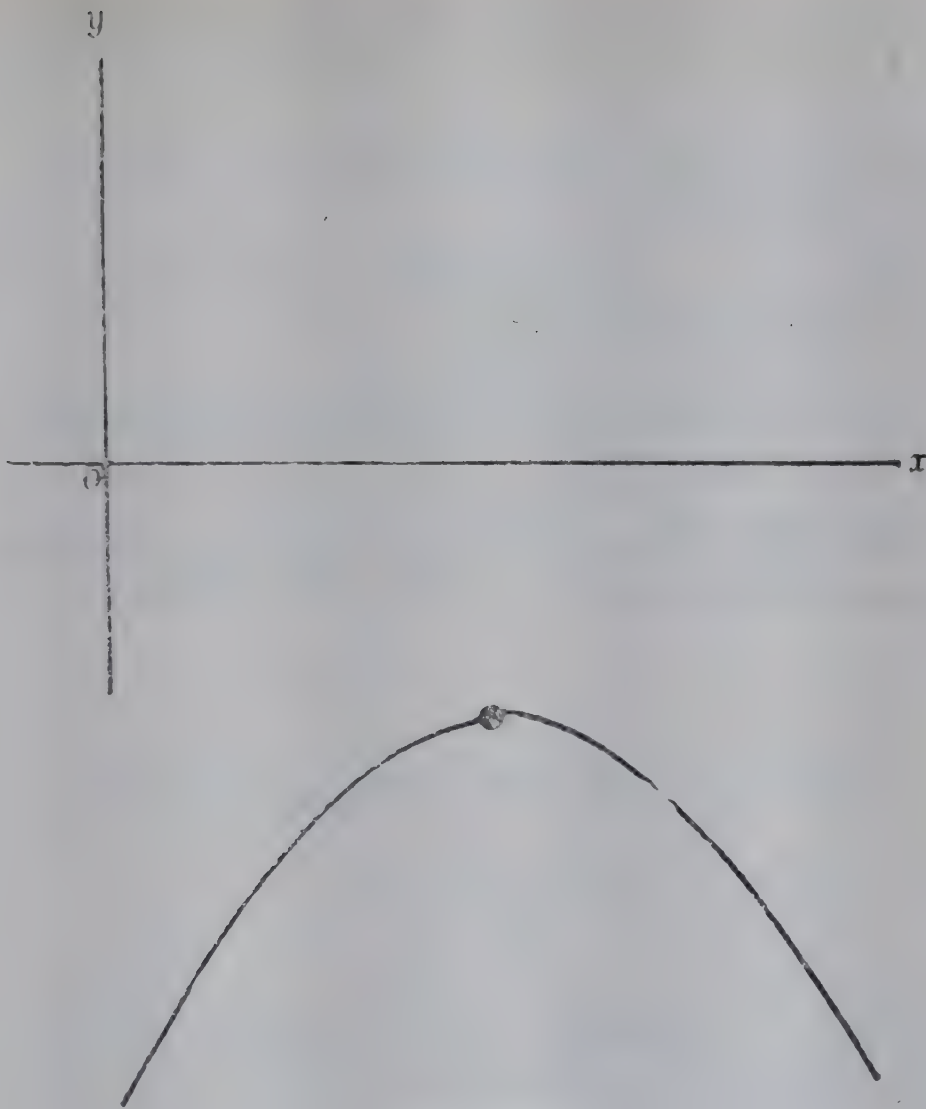


Fig. (4.6) [$a<0$]

ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನ $ax^2 + bx + c$, $a>0$ ಮೂಲಗಳಾದ α, βಗಳ ನಡುವೆ x ಇರುವಾಗ ಋಣವೆಂಬುದನ್ನೂ xನ ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಧನವೆಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ.

(ii) $a<0$ ಆದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗುತ್ತವೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯು ಚಿತ್ರ (4·4) ರಂತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

The function is positive when x lies between the roots α and β, and is negative for all other values of x.

Case II. α and β are equal (and real). Now

$$y=a\ (x-\alpha)^2$$

$y=0$ when $x=\alpha$. y is positive for all other values of x, if $a>0$, and negative if $a<0$.

Fig. 4.2 shows the graph of the functions when $a>0$, and Fig. 4-5 when $a<0$.

Case III. When the roots α and β are imaginary. We use a different method, in this case. We have

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right], \text{ by completing the square}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right]$$

Since the roots are imaginary, the discriminant $b^2-4ac<0$. Hence $-(b^2-4ac)$ is positive. The expression inside the square bracket is therefore positive for all values of x. Hence y is always positive, if $a>0$, and always negative if $a<0$. The graph does not cut the x—*axis*, since the roots are not real. The graph of the function is as in fig. 4.3 when $a>0$, and as in fig. 4.6 when $a<0$.

When the roots are imaginary, the quadratic function ax^2+bx+c is positive for all values of x if $a>0$, and negative for all values of x if $a<0$.

ಮೂಲಗಳಾದ α, βಗಳ ನಡುವೆ x ಇರುವಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ಧನ, xನ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಋಣ.

ಸಂದರ್ಭ II α, β ಸಮಾನ (ಹಾಗೂ ವಾಸ್ತವ). ಈಗ $y=a(x-\alpha)^2$

$x=\alpha$ ಆದಾಗ $y=0$. $a>0$ ಆದಾಗ, xನ ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ y ಧನ, $a<0$ ಆದಾಗ ಋಣ.

$a>0$ ಆದಾಗ, ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ (4·2) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, $a<0$ ಆದಾಗ ಚಿತ್ರ (4·5) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಂದರ್ಭ III α, βಗಳು ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ, ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಬೇರೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. ಈಗ,

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$ ವರ್ಗ ಪೂರಣ ಮಾಡು ವುದರಿಂದ

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right]$$

ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಶೋಧಕವಾದ $b^2-4ac<0$. ಆದ್ದರಿಂದ $-(b^2-4ac)$ ಧನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚೌಕುಳಿ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಉಕ್ತಿಯು xನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಧನ. ಆದ್ದರಿಂದ, $a>0$ ಆದರೆ, y ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ, ಹಾಗೆಯೇ $a<0$ ಆದಾಗ ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣ. ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಲ್ಲದುದರಿಂದ, ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲ. $a>0$ ಆದಾಗ; ನಕ್ಷೆಯು ಚಿತ್ರ 4·3 ರಂತೆಯೂ, $a<0$ ಆದಾಗ ಚಿತ್ರ 4·6 ರಂತೆಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯಗಳಾದಾಗ, ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನ ax^2+bx+c ಎಂಬುದು $a>0$ ಆದಾಗ xನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಧನವಾಗಿಯೂ $a<0$ ಆದಾಗ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು.

Note the gradual evolution between the figures (4.1)—(4.3). The curve which cuts the x—*axis* in two distinct points in (4.1) moves up, so that these points coincide in (4.2). The curve moves further up in (4.3), and the points have disappeared. Similarly between (4.4)—(4.6).

4.9 Maximum and Minimum values of the function ax^2+bx+c.

There is a lowest point giving the minimum value for y, in figs. 4.1, 4.2 and 4.3. There is a highest point, giving the maximum value for y, in figs. 4.4, 4.5 and 4.6. All cases can be discussed by expressing y as in case III above.

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \text{by completing the square}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac)}{4a^2}\right)\right.$$

The expression in the second bracket here is a constant. The first bracket $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ is least when it is zero, *i.e.*, when

$x=-\frac{b}{2a}$, because for all other values of x. its value >0

Hence, we have

Case I. $a>0$. *y is minimum when* $x=-\frac{b}{2a}$. The minimum value of y is $-\frac{b^2-4ac.}{4a}$

Case II. $a<0$. y is maximum when $x=-\frac{b}{2a}$. The maximum value of y is $-\frac{b^2-4ac.}{4a}$

ಚಿತ್ರ 4·1 ರಿಂದ 4·3 ರವರೆಗೆ ಕಾಣಬರುವ ಅವರೋಹಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಚಿತ್ರ 4·1 ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಾ 4·2 ರಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. 4·3 ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಇನ್ನೂ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಬಿಂದುಗಳು ಮಾಯವಾಗಿವೆ. ಇದರಂತೆ 4·4 ರಿಂದ 4·6 ಚಿತ್ರಗಳವರಗೆ.

4·9 ax^2+bx+c ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು

ಚಿತ್ರ 4·1, 4·2, 4·3 ಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿರುವ ಬಿಂದುವೊಂದಿದೆ. ಇದು y ಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 4·4, 4·5, 4·6 ರಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುವೊಂದಿದೆ. ಇದು y ಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಮೇಲೆ ಸಂದರ್ಭ III ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ y ಯನ್ನು ಬರೆದು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right], \text{ ವರ್ಗಪೂರ್ಣಮಾಡುವುದರಿಂದ}$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಉಕ್ತಿಯು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ಎಂಬುದು xನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, ಬೆಲೆ >0 ಆಗಿರುವುದುರಿಂದ ಇದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯ. ಆಗ $x = -\frac{b}{2a}$

ಸಂದರ್ಭ I. $a>0$ ಆದಾಗ.

$x = -\frac{b}{2a}$ ಆದಾಗ, y ಕನಿಷ. yಯ್ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ಸಂದರ್ಭ II. $a<0$ ಆದಾಗ.

ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= -\frac{b^2-4ac}{4a}$. $x = -\frac{b}{2a}$ ಆದಾಗ, y ಗರಿಷ್ಠ. yಯ

The graphs suggest that the maximum or minimum value of y is attained when x takes the value midway between α and β, *i.e.*, when $x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. This is verified, for

$$\alpha = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = -\frac{b}{2a}$, which is the value of x when y is a minimum, $a>0$ or a maximum, $a<0$.

The student will be able to work out all these cases later by the method of the differential calculus.

Examples :

1 When is the function $2x^2-3x-2$ positive?

Ans. : When x does not lie between the roots $-\frac{1}{2}$ and 2.

2 Prove that the function x^2-x+1 is always positive.

The roots are imaginary.

3 Construct the function which vanishes when $x=-2$ and when $x=3$, and which is equal to 12 when $x=0$.

The function should be of the form $a(x+2)(x-3)$. When $x=0$, its value is $-6a \quad \therefore a=-2$.

4 Show that for all real values of x, the function $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ lies between $\frac{1}{3}$ and 3.

The given function is not a quadratic function at all. It is the ratio of two quadratics. But if we write $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, we get after simplifying,

x ಎಂಬುದು α, βಗಳ ನಡುಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದಾಗ, ಎಂದರೆ $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ಆದಾಗ yಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು ಒದಗಿ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವು ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ

$$\alpha = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = -\frac{b}{2a}$. x ನ ಈ ಬೆಲೆಗೆ $a>0$ ಆದಾಗ, y ಕನಿಷ್ಟವೂ, $a<0$ ಆದಾಗ y ಗರಿಷ್ಟವೂ ಆಗಿದೆಯಷ್ಟೆ,

ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮುಂದೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಚಲನಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆಯಲು ಶಕ್ತನಾಗುವನು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2x^2-3x-2$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಯಾವಾಗ ಧನವಾಗಿರುವುದು ?

ಉ. ಮೂಲಗಳಾದ $-\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು 2 ಇವುಗಳ ನಡುವೆ x ಇಲ್ಲದಿರುವಾಗ.

2. x^2-x+1 ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯ.

3. $x=-2$ ಹಾಗೂ $x=3$ ಆದಾಗ ನಶಿಸಿ ಹೋಗುತ್ತಾ $x=0$ ಆದಾಗ 12 ಆಗುವಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಉತ್ಪನ್ನವು $a(x+2)(x-3)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರಬೇಕು. $x=0$ ಆದಾಗ, ಅದರ ಬೆಲೆ $-6a$ $\therefore a=-2$.

4. xನ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಉತ್ಪನ್ನವು ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನವೇ ಅಲ್ಲ.

ಅದು ಎರಡು ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಆದರೆ $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ, ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದಮೇಲೆ

$$x^2(1-y) - x(1+y) + (1-y) = 0$$

x is real *i.e.* the roots of this quadratic equation are real

$$\therefore\ (1+y)^2 - 4(1-y)^2 > 0$$

$$3y^2 - 10y + 3 < 0 \quad \therefore\ y \text{ lies between the roots } \tfrac{1}{3} \text{ and } 3.$$

5 Sketch the graph of the function $3x^2+3x-6$.

$$y = 3(x-1)(x+2)$$

Hence the graph cuts the *x-axis* at -2 and 1, is below the *x-axis* between -2 and 1, and rises on either side of these points indefinitely. The figure is completed, after fig. 4.1.

4.10 The Method of Analytical Geometry

$$y = 3(x^2+x-2)$$

$$= 3\left[(x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}\right] = 3(x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{27}{4}$$

$$\therefore\ y + \tfrac{27}{4} = 3(x+\tfrac{1}{2})^2$$

Transfer the origin to the point $(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{27}{4})$. The equation becomes $Y = 3X^2$.

Hence, plot the point $(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{27}{4})$, draw lines through it parallel to the original axes Ox, Oy. Draw the curve $Y = 3X^2$, referred to the new axes.

Exercises 4.2

1 When are the following functions positive ?
x^2-2x-2, x^2+4x+3, $8x-x^2$, $4-3x-x^2$.

2 When are the following functions negative?
$2x^2-5x+2$, $3x^2-8x-3$, $4-x^2$, x^2-x-5.

$x^2(1-y)-x\ (1+y)+(1-y)=0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. x ವಾಸ್ತವ, ಎಂದರೆ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಾಸ್ತವ.

$$\therefore \quad (1+y)^2-4\ (1-y)^2>0$$

ಎಂದರೆ, $3y^2-10y+3<0$

$\therefore$ y ಎಂಬುದು ಮೂಲಗಳಾದ $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು 3 ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು.

5. $3\,x^2+3x-6$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

$y=3\ (x-1)\ (x+2)$. ಆದ್ದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು -2 ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, -2 ಮತ್ತು 1 ಇವುಗಳ ನಡುವೆ x- ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಿರುವೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೇಳುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ .1 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಬಹುದು.

4.10 ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಾನ

$$y=3\ (x^2+x-2)$$

$$=3\left[\ (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{9}{4}\ \right]=3\ (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{27}{4}$$

$$\therefore \quad y+\frac{27}{4}=3(x+\tfrac{1}{2})^2$$

ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು $(-\frac{1}{2},-\frac{27}{4})$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ. ಸಮೀಕರಣ $Y=3X^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $(-\frac{1}{2},-\frac{27}{4})$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಇದರ ಮೂಲಕ ಮೊದಲಿನ ಅಕ್ಷಗಳಾದ Ox, Oy ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರಗಳಾದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಹೊಸ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು $Y=3X^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1 ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಯಾವಾಗ ಧನವಾಗಿರುತ್ತವೆ?

$$x^2-2x-2,\ x^2+4x+3,\ 8x-x^2,\ 4-3x-x^2$$

2 ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಯಾವಾಗ ಋಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ?

$$2x^2-5x+2,\ 3x^2-8x-3,\ 4-x^2,\ x^2-x-5$$

3 Prove that the following functions are alway positive:

$$x^2-2x+4, \quad 3x^2-4x+5, \quad (x-1)(x-2)+2.$$

4 Sketch the graphs of the functions $2x^2+x-6$ $-x^2+3x+4$, $2x-x^2$, $(x+2)^2$, x^2+x+4, $4-4x+2x^2$.

5 Construct a function which vanishes when $x=2$ and when $x=\frac{1}{2}$ and which is equal to 6 when $x=1$.

6 Construct the function whose roots are $2+3$ $2-3i$ and which is equal to -26 when $x=0$.

7 A function vanishes when $x=2\pm\sqrt{3}$, and equal to 1 when $x=0$. What is its value when $x=2$?

8 Show that the function $\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+x+1}$ lies between $\frac{1}{3}$ and 7 for all real values of x.

9 When x is real, show that the functions $\dfrac{x^2+2x-}{x^2+2x-}$ cannot lie between $\frac{4}{9}$ and 1.

10 Prove that the function $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15}$ can assume any real value.

11 Prove that the function $\dfrac{x^2+6x+3}{4x^2+2x-1}$ can take all real values.

12 Prove that the function $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x+3}$ cannot lie between 1 and $-\frac{1}{3}$

3 ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ ಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. x^2-2x+4, $3x^2-4x+5$, $(x-1)(x-2)+2$

4 $2x^2+x-6$, $-x^2+3x+4$, $2x-x^2$, $(x+2)^2$, x^2+x+4, $4-4x+2x^2$ ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.

5 $x=2$ ಮತ್ತು $x=\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ ನಶಿಸಿ ಹೋಗುವ, ಹಾಗೂ $x=1$ ಆದಾಗ 6 ಆಗುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

6 $2+3i$, $2-3i$ ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿ $x=0$ ಆದಾಗ -26 ಆಗುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

7 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು $x=2\pm\sqrt{3}$ ಆದಾ ನಶಿಸಿಹೋಗುತ್ತಾ, $x=0$ ಆದಾಗ 1 ಆಗುತ್ತದೆ. $x=2$ ಆದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು?

8 $\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+x+1}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು x ನ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು 7 ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9 x ವಾಸ್ತವವಾದಾಗ, $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{4}{9}$ ಮತ್ತು 1 ಈ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರಲಾ।ಎವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10 $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ಪಡೆಯಬಲ್ಲುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

11 $\dfrac{x^2+6x+3}{4x^2+2x-}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಲ್ಲುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x+3}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು 1 ಮತ್ತು $-\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

CHAPTER 5

Progressions

5.1 Sequences—*A sequence* is a succession of numbers formed according to a definite law or rule.

Examples :—(i) 1, 4, 9, 16.........These numbers are successively the squares of the natural numbers and form a sequence. The *nth term* of this sequence is n^2, where n is a natural number.

(ii) The numbers 1, 4, 7, 10, 13......form a sequence in which each term after the first is obtained by adding 3 to the preceding term.

5.2 Arithmetic Progressions—An *arithmetic progression* is a sequence in which each term, after the first, is obtained by adding a constant number to the preceding term. The constant number added in this way is called the *common difference.* We shall briefly denote an arithmetic progression by *A.P.*

Example (ii) of 5.1 is an *A.P.* Here are some more examples :

(i) 5, 10, 15, 20. 25. This is an *A.P.* with 5 as the first term and 5 as the common difference.

(ii) –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9. This is an *A.P.* with –9 as the first term and 3 as the common difference.

(iii) 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5. This is an *A.P.* with 7 as the first term and –2 as the common difference.

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಶ್ರೇಢಿಗಳು

5.1 ಶ್ರೇಢಿಗಳು:

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ರಚಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಂಪರೆಗೆ ಶ್ರೇಢಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) 1, 4, 9, 16,........

ಇವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಪರಂಪರೆ. ಇವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೇ ಪದವು n^2. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

(ii) 1, 4, 7, 10, 13,....ಇವು ಇನ್ನೊಂದು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿರುವ (ಒಂದನೆಯ ಪದದ ವಿನಾ) ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 3ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು.

5.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು:

ಹೆಸರೇ ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ (ಒಂದನೆಯ ಪದದ ವಿನಾ) ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನೂ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದಂತಹ ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಹೆಸರು (ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಾವು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ $A.P$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5.1ರ ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆ ಒಂದು $A.P.$ ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) 5, 10, 15, 20, 25. ಇದೊಂದು $A.P.$ ಇದರ ಮೊದಲಿನ ಪದ 5 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 5.

(ii) $-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$. ಇದೊಂದು $A.P.$ ಇದರ ಮೊದಲಿನ ಪದ -9 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3.

(iii) $7, 5, 3, 1, -1, -3, -5$. ಇದೊಂದು $A.P.$ ಇದರ ಮೊದಲಿನ ಪದ 7 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -2.

Generally, if a is the first term and d the common difference, the terms can be written down as follows :

$$a,\ a+d,\ \ a+2d,\ \ a+3d,\ \ a+4d \ldots\ldots\ldots$$

We notice that : 3rd term $=a+2d$,
5th term $= a+4d$,
10th term $= a+9d$ and so on.

Hence denoting the nth term by l, we have the first important formula :

$$l = a + (n-1)d. \qquad \ldots (5.1)$$

Examples :—(iv) Find the 20th term of the *A.P.* 3, 7, 11 ....

Here $a=3$, $d=4$ and $n=20$.

Hence 20th term $= a+(20-1)d$
$= 3+19\times 4$
$= 79$

(v) Find the 16th term of the *A.P.* -7, -2, 3, 8 ....

$a= -7$, $d=5$ and $n=16$.

$\therefore$ 16th term $= -7 + 15\times 5 = 68$

Exercises 5.1

In exercises 1–10, determine which of the sequences are arithmetic progressions. Write down the next two terms of each *A.P.*

1 1, 3, 5, 7
2 1, 2, 4, 6, 8
3 $-7, -1, 5, 11$
4 $2, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}$
5 6, 7, 11, 14
6 $-9, -6, -3, 0$
7 5·5, 6.1, 6.7, 7.3
8 $2-x,\ 2,\ 2+x$
9 $-2y,\ x,\ y$
10 $x-3,\ 2x,\ 3x+3$

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, aಯು ಮೊದಲಿನ ಪದ ಮತ್ತು d ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ದ್ದರೆ ಅಂತಹ $A.P.$ಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು—

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots\ldots$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸುವ ವಿಚಾರ—

3ನೆಯ ಪದ$=a+2d$

5ನೆಯ ಪದ$=a+4d$

10ನೆಯ ಪದ$=a+9d$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಆದುದರಿಂದ nನೇ ಪದವನ್ನು l ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ

$$l=a+(n-1)d \qquad \ldots(5.1)$$

ಎನ್ನುವ ಮೊದಲಿನ ಮುಖ್ಯಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(iv) 3, 7, 11,........

ಎಂಬ $A.P.$ಯ 20ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a=3,\ d=4,\ n=20$

$\therefore$ 20ನೇ ಪದ$=a+(20-1)d$

$=3+19\times4=79$

(v) $-7,\ -2,\ 3,\ 8, \ldots\ldots$ಎಂಬ $A.\ P.$ಯ 16ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a=-7,\ d=5$ ಮತ್ತು $n=16$

$\therefore$ 16ನೇ ಪದ$=-7+15\times5=68$

ಅಭ್ಯಾಸ 5·1

1 ರಿಂದ 10ರವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ($A.P$) ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1 $\quad 1,\ 3,\ 5,\ 7$	2 $\quad 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$
3 $\quad -7, -1,\ 5,\ 11$	4 $\quad 2,\ 3\frac{1}{4},\ 4\frac{1}{2},\ 5\frac{3}{4}$
5 $\quad 6,\ 7,\ 11,\ 14$	6 $\quad -9, -6, -3,\ 0$
7 $\quad 5{\cdot}5,\ 6{\cdot}1,\ 6{\cdot}7,\ 7{\cdot}3$	8 $\quad 2-x,\ 2,\ 2+x$
9 $\quad -2y,\ x,\ y$	10 $\quad x-3,\ 2x,\ 3x+3$

In exercises 11–20, find the indicated term in each A.P.

11	4,6,8 ...... 24th	**12**	1, 6, 11 ...... 17th
13	10, 15, 20 .... 11th	**14**	8, 6, 4 ...... 24th
15	11, 6, 1, ... 17th	**16**	–14, –8, –2 .... 12th
17	–3, –10, –17 .. 22nd	**18**	$x-y$, $2x$, $3x+y$ .. 19th
19	$x-3$, $2x+1$, $3x+5$ 10th	**20**	$2-x$, 5, $8+x$ .. 15th

5.3 The sum of n terms of an Arithmetic Progression—Let a be the first term and d the common difference.

If there are n terms, then the last term l is given by the formula $l=a+(n-1)d$

Let S denote the sum of n terms. Then we can write down the sum in two ways as follows :—

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+(a+2d)+(a+d)+a$$

The second equation is obtained from the first by reversing the order of the terms on the right hand side. Adding the corresponding sides of the two equations, we get,

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(a+l)+(a+l)+a+l),$$

$=n(a+l)$, since there are n terms.

$$\therefore S=\frac{n}{2}(a+l) \qquad \ldots(5.2$$

Substituting $l=a+(n-1)d$ we obtain

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\right\}d \qquad \ldots(5.3$$

11 ರಿಂದ 20ರ ವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $A.P$ಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ: —

11 4,6,8,....24ನೆಯದು

12 1,6, 11,....17ನೆಯದು

13 10, 15, 20,....11ನೆಯದು

14 8, 6, 4,....24ನೆಯದು

15 11, 6, 1,....17ನೆಯದು

16 $-14, -8, -2, \ldots$ 12ನೆಯದು

17 $-3, -10, -17, \ldots$ 22ನೆಯದು

18 $x-y,\ 2x,\ 3x+y \ldots$ 19ನೆಯದು

19 $x-3,\ 2x+1,\ 3x+5, \ldots$ 10ನೆಯದು

20 $2-x,\ 5,\ 8+x, \ldots$ 15ನೆಯದು

5.3 ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

aಯು ಮೊದಲಿನ ಪದವೂ dಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಪದಗಳಿದ್ದರೆ, ಕೊನೆಯ ಪದ lಎನ್ನುವುದು $l=a+(n-1)d$ ಎನ್ನುವ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದು.

S ಎನ್ನುವುದು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ವಿಧದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

ಒಂದನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನುರೂಪ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ —

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$$
$$+(a+l)=n(a+l),$$ (ಇಲ್ಲಿ n ಪದಗಳಿರುವುದರಿಂದ)

$$\therefore S=\frac{n}{2}(a+l) \qquad \ldots (5\cdot2)$$

$l=a+(n-1)d$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$S=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$ ಎಂದಾಗುವುದು. $\ldots (5\cdot3)$

Formulæ (5.1), (5.2) and (5.3) are useful for applications to arithmetic progressions. The five quantities a, d, l, n and S, occurring in these formulae are sometimes called the elements of an arithmetic progression. If three of the elements are given, the other two may be found by use of the above formulae.

Examples :—(i) *Find the sum of 30 terms of the A.P.* 2, 4, 6............

Here $a=2$, $d=2$ and $n=30$. Applying formula (5.3), we get

$$S = (30/2)\ \{2.2+(30-1)\,2\}$$
$$=15\ (4+58)$$
$$= 930$$

(ii) *Given* $n=12$, $l=71$, $d=3$, *find* a *and* S.

Substituting in formula (5.1),

$$71 = a + (11)\ 3$$
$$\therefore\ a = 38$$

Now using formula (5.2),

$$S = 6\ \ (38+71)$$
$$= 654$$

(iii) *Given* $n=11$, $S=110$, *and* $d=3$, *find* a *and* l

Substituting in formulae (5.1) and (5.2), we ge.

$$l = a + 10.3$$

$110=(11/2)\,(a+l)$, which may be written as

$$a+l = 20$$
$$a-l = -30$$

The solution is $a= -5$, $l=52$ The progression may now be written as −5, −2, 1, 4,.............25

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಲು (5·1), (5·2) ಮತ್ತು (5·3) ಸೂತ್ರಗಳು ತುಂಬ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ a, d, l, n ಮತ್ತು S ಎನ್ನುವ ಐದು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಐದು ಮೂಲಾಂಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯವುದುಂಟು. ಮೂರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಉಳಿದೆರಡನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು (i) 2, 4, 6,........APಯ 30 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇ $a=2$, $d=2$ ಮತ್ತು $n=30$ಲ್ಲಿ

(5·3) ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ,

$$S = \frac{30}{2}\Big[2\cdot 2 + (30-1)2\Big] = 15\,(4 - 58)$$

$$= 930$$

(ii) $n=12$, $l=71$, $d=3$ ಎಂದಿರುವಾಗ a ಮತ್ತು Sನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5.1) ನೆಯ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲಾಗಿ,

$71 = a + 11.3$

$\therefore a = 38$

ಈಗ (5.2) ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ

$S = 6(38 + 71)$

$= 654$

(iii) $n=11$, $S=110$ ಮತ್ತು $d=3$ ಎಂದಿರುವಾಗ a ಮತ್ತು lನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5.1) ಮತ್ತು (5.2) ನೆಯ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲಾಗಿ,

$l = a + 10.3$

$110 = \frac{11}{2}(a + l)$

$a + l = 20$

$a - l = -30$

$\therefore a = -5, \quad l = 25$

ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಈಗ -5, -2, 1, 4,........, 25 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

Exercises 5.2

Find the last term and the sum S of each arithmetic progression (1–10).

1 3, 6, 9 .... to 10 terms

2 2, 4, 6 .... to 21 terms

3 7, 12, 17 .... to 11 terms

4 9, 14, 19 .... to 10 terms

5 15, 11, 7 .... to 9 terms

6 51, 46, 41 .... to 17 terms

7 –16, –13, –10 .... to 13 terms

8 –9, –5, –1 .... to 23 terms

9 4.6, 5.9, 7.2 .... to 21 terms

10 2.3, 5.4, 8.5 .... to 31 terms

With the usual notation a, d, n, l and S for the elements of an arithmetic progression, find the two missing elements in each of the *A.P.*'s (11–16).

11 $a=7$, $l=34$, $n=10$

12 $a=42$, $l=10$, $d=-2$

13 $l=51$, $d=7$, $n=11$

14 $a=24$, $d=-3$, $n=25$

15 $a=2$, $l=66$, $S=578$

16 $d=3$, $l=50$, $S=440$

17 Find the sum of the integers from 1 to 80.

18 Find the sum of the odd integers between 20 and 100.

19 Find the sum of the integers between 3 and 101 which are divisible by 5.

20 Prove that the sum of the first n positive even integers is $n(n+1)$.

21 Prove that the sum of the first n positive odd integers is n^2.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (1 – 10) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದ lನ್ನೂ, ಮೊತ್ತ S ನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

1 3, 6, 9,............10 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

2 2, 4, 6,............21 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

3 7, 12, 17,........11 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

4 9, 4, 19,........10 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

5 15, 11, 7,........9 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

6 51, 46, 41,........17 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

7 –16, –13, –10,........13 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

8 –9, –5, –1,............23 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

9 4.6, 5.9, 7.2 ....21 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

10 2.3, 5.4, 8.5,..........31 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ a, d, n, l, ಮತ್ತು S ಎಂಬ ಮೂಲಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಥದ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು AP ಯ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ (11—16)

11 $a=7$; $l=34$, $n=10$

12 $a=42$, $l=10$, $d=-2$

13 $l=51$, $d=7$, $n=11$

14 $a=24$, $d=-3$, $n=25$

15 $a=2$, $l=66$, $S=578$

16 $d=3$, $l=50$, $S=440$

17 1ರಿಂದ 80ರ ವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

18 20ರಿಂದ 100ರ ವರೆಗಿನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

19 3 ಮತ್ತು 10ರ ನಡುವೆಯಿರುವ ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

20 ಮೊದಲಿನ n ಧನ ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $n\ (n+1)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21 ಮೊದಲಿನ n ಧನ ವಿಷಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ n^2 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

22 Sticks are arranged in a pile so that the top layer has 1 stick, the next layer has 2 sticks, the next 3, and so on to the bottom layer which has 42 sticks. Find the number of sticks in the pile.

23 A man is offered a post at a starting salary of Rs 3,600 per annum. He is also offered an increment of Rs 100 per year at the end of each year or alternatively an increment of Rs 25 for each six months at the end of each half year. Find the total salary he receives under each proposition for a five-year period.

24 How many times will a clock strike in 12 hours, if it strikes the hours and half hours ?

25 A body falling from rest travels 16 feet during the first second, 48 feet during the second second, 80 feet during the third second, and so on. Find how far the body falls (a) in the first 8 seconds ; (b during the 8th second.

26 A man buys a radio for Rs 1,000. He agrees to pay Rs 50 each month, beginning at the end of the first month together with interest of 1 per cent on the amount unpaid during that month. Find the total payment.

5.4 Harmonic Progressions—A harmonic progression (*H.P.*) is a sequence such that the reciprocals of its terms form an arithmetic progression.

Examples :—(i) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 .... are in *H.P.* since their reciprocals 1, 2, 3, 4, 5 .... are in *A.P.*

(ii) To find the 11th term of the *H.P.* 1/5, 1/9, 1/13, 1/17 .... The corresponding *A.P.* is 5, 9, 13, 17 .... whose 11th term is $5+10.4=45$.

22 ಕೆಲವು ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ರಾಶಿಯಾಗಿ ಒಟ್ಟಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಪದರದಲ್ಲಿ 1 ಕಡ್ಡಿಯಿದೆ; ಮುಂದಿನದರಲ್ಲಿ 2, ಅದರ ಮುಂದಿನದರಲ್ಲಿ 3 ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಕಡ್ಡಿಗಳಿವೆ. ಬುಡದ ಪದರದಲ್ಲಿ 42 ಕಡ್ಡಿಗಳಿರುವುದಾದರೆ, ಒಟ್ಟು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23 ಪ್ರಾರಂಭದ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನ ರೂ. 3600 ಇರುವಂತೆ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗವನ್ನು ನೀಡಲಾಯಿತು. ಎರಡು ರೀತಿಯ ಬಡತಿಯ ದರಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಲಾಯಿತು. ಒಂದನೆಯ ದರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ ರೂ 100ರ ಬಡತಿ ನೀಡಲಾಗುವುದು. ಎರಡನೆಯ ದರದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧ ವರ್ಷದ ಸೇವೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ವರ್ಷದ ಬಡತಿಯೆಂದು ರೂ 25ನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಸೇವಾವಧಿಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಆತನಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದರದಲ್ಲಿಯೂ ದೊರೆಯುವ ಸಂಬಳ ಬಡತಿಗಳ ಸಮಗ್ರ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?

24 ಗಂಟೆಗಳನ್ನೂ, ಅರ್ಧಗಂಟೆಗಳನ್ನೂ ಹೊಡೆಯುವ ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವು 12 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಲ ಹೊಡೆದಿರುವುದು ?

25 ನಿಶ್ಚಲ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ವಸ್ತು ಮೊದಲಿನ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 16 ಅಡಿಗಳನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 48 ಅಡಿಗಳನ್ನೂ, ಮೂರನೆಯ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 80 ಅಡಿಗಳನ್ನೂ (ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದಕ್ಕೂ ಸಹ) ಪ್ರಯಾಣಿಸಿರುವುದು. (a) ಮೊದಲಿನ 8 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ; (b) 8ನೆಯ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಆ ವಸ್ತು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿರುವುದೆಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

26 ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ರೂ 1000 ಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಒಂದನೆಯ ತಿಂಗಳಿನ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗುವಂತೆ, ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳೂ ರೂ 50 ನ್ನೂ ಮತ್ತು ಅದುವರೆಗೆ ಬಾಕಿಯಾಗಿದ್ದ ಮೊಬಲಗಿನ ಮೇಲೆ ಶೇಕಡಾ ಸಾಲಿಯಾನ 1 ಬಡ್ಡಿಯ ಹಣವನ್ನೂ ಮರುಪಾವತಿಸುವುದಾಗಿ ಅವನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಒಟ್ಟು ಪಾವತಿ ಮಾಡಿದ ಹಣವೆಷ್ಟು ?

5.4 ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಇದನ್ನು *H.P.* ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) 1. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,.......... ಇವು *H.P.*ಯಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು 1, 2, 3, 4, 5, ... ಇವು *A.P.*ಯಲ್ಲಿವೆ.

(ii) 1/5, 1/9, 1/13, 1/7, ...ಈ H.Pಯ 11ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ. ಈ *H.P.*ಯ ಅನುರೂಪ *A.P.*ಯು 5, 9, 13, 17, ... ಆಗಿದೆ. ಇದರ 11ನೆಯ ಪದವು $5+10.4=45$.

Hence the 11th term of the given *H.P.* is 1/45.

From this example it is clear that any problem in *H.P.* can be solved by treating the corresponding problem of the associated *A.P.*

5.5 Arithmetic and Harmonic Means.—In an *A.P.*, the terms between the first and last terms are called *arithmetic means*. Similarly in an *H.P.*, the terms between the first term and last term are called *harmonic means*.

Examples :—(i) *Insert* 5 *arithmetic means between* 3 *and* 11. The corresponding *A.P.* has 7 terms, of which 3 is the first term and 11 is the seventh term. Hence if d is the common difference, we have by formula 5.1,

$$11=3+6d$$

$$\therefore\ d=4/3$$

The required means are $4\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{3}$, 7, $8\frac{1}{3}$, $9\frac{2}{3}$

(ii) *Insert* 4 *harmonic means between* 2 *and* 12 Inthe corresponding *A.P.*, 1/2 is the first term and 1/12 is the 6th term. If d is the common difference,

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+5\mathrm{d}$$

$$\therefore d=-\frac{1}{12}$$

The *A.P.* is 1/2, 5/12, 4/12, 3/12, 2/12, 1/12

∴ the required harmonic means are 12/5, 12/4, 12/3, 12/2 or 12/5, 3, 4, 6

ಆದುದರಿಂದ $H.P.$ಯ 11ನೆಯ ಪದವು 1/45

ಆದುದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು $H.P.$ಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನೂ ಅದರ ಅನುರೂಪ $A.P.$ಯಲ್ಲಿ ಅದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

5 5 ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳು

ಒಂದು $A.P.$ಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು $A.M.$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು $H.P.$ಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು $H.M.$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) 3 ಮತ್ತು 11ರ ನಡುವೆ 5 ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಈ A.Pಯಲ್ಲಿ 7 ಪದಗಳಿವೆಯೆಂದೂ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 3 ಮೊದಲನೆಯ ಪದವೆಂದೂ 11 ಕೊನೆಯ (7ನೆಯ) ಪದವೆಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಆದುದರಿಂದ d ಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದರೆ, 5.1 ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$11=3+6d$$

$$\therefore d=4/3$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಮಧ್ಯಕಗಳು $4\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}, 7, 8\frac{1}{3}, 9\frac{2}{3}$

(ii) 2 ಮತ್ತು 12 ರ ನಡುವೆ 4 ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

ಇದರ ಅನುರೂಪ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}$ ಮೊದಲಿನ ಪದ ಮತ್ತು 1/12 ಆರನೆಯ ಪದ. d ಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} + 5d$$

$$\therefore d = -\frac{1}{12}$$

$\therefore A.P.$ ಯು $\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$ ಆಗಿದೆ.

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳು $\frac{12}{5}, \frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \frac{12}{2}$

ಅಥವಾ 12/5, 3, 4, 6

Exercises 5·3 :

Insert the indicated number of arithmetic meanss between the given pair of values in each of he problem **1 to 6**.

1 5 and 23 ; 2 means

2 –5 and 44 ; 6 means

3 4 and –21 ; 4 means

4 4 and 44 ; 9 means

5 –11 and 11 ; 10 means

6 23 and –58 ; 8 means

In problems 7–10, insert the indicated number of harmonic means.

7 2 and 14 ; 5 means

8 $\frac{1}{4}$ and 1/11 ; 6 means

9 –1/3 and 1/9 ; 5 means

10 –1/7 and 1/23 ; 9 means

11 Find the arithmetic and harmonic means of the pairs : 3, 7 ; –3, 5 ; and 2, –10.

5·6 Geometric Progressions—A geometric progression (G.P) is a sequence in which each term, after the first, is obtained by multiplying the preceding term by the same constant factor. The constant factor is called the *common ratio.*

If a is the first term and r the common ratio, the G.P. is a, ar, ar^2, ar^3,......................

The nth term is easily seen to be ......(5.4)

Examples : 1, 3, 9, 27....is a G.P. with common ratio 3 and nth term$=3^{n-1}$

–2, 4, –8, 16 .... is a *G.P.* with common ratio –2 and nth term $= -2.\ (-2)^{n-1}$

3, 2, 4/3, 8/9......is a G.P. with common ratio 2/3 and nth term $=3(2/3)^{n-1}$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.3

1 ರಿಂದ 6ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳವರೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಷ್ಟು ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1 5 ಮತ್ತು 23 ; 2 ಮಧ್ಯಕಗಳು

2 -5 ಮತ್ತು 44 ; 6 ಮಧ್ಯಕಗಳು

3 4 ಮತ್ತು -21 ; 8 ಮಧ್ಯಕಗಳು

4 4 ಮತ್ತು 44 ; 9 ಮಧ್ಯಕಗಳು

5 -11 ಮತ್ತು 11 ; 10 ಮಧ್ಯಕಗಳು

6 23 ಮತ್ತು -58 ; 8 ಮಧ್ಯಕಗಳು

7 ರಿಂದ 10ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳವರೆಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಷ್ಟು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7 2 ಮತ್ತು 14 ; 5 ಮಧ್ಯಕಗಳು ;

8 $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{11}$; 6 ಮಧ್ಯಕಗಳು ;

9 $-\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{9}$; 5 ಮಧ್ಯಕಗಳು ;

10 $-\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{23}$; 9 ಮಧ್ಯಕಗಳು ;

11 ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3, 7 ; -3, 5 ; ಮತ್ತು 2, -10

5.6 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ (ಒಂದನೇ ಪದದ ವಿನಾ) ಪ್ರತಿ ಪದವೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಗುಣಿಸುವರ ಮೂಲಕ ದೊರೆಯುವುದು. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು *G.P.* ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಿರ ಅಪವರ್ತನದ ಹೆಸರು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ.

aಯು ಮೊದಲಿನ ಪದವೂ r ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ *G.P.* ಯು $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$ ಆಗಿರುವುದು. nನೇ ಪದವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ....(5·4)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: 1, 3, 9, 27,... ....ಇದೊಂದು *G.P.* ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ 3 ಮತ್ತು nನೇ ಪದ$=3^{n-1}$

$-2, 4, -8, 16$.........ಇದೊಂದು *G.P.* ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ -2 ಮತ್ತು nನೇ ಪದ$= -2\ (-2)^{n-1}$

$3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}$... ....ಇದೊಂದು *G.P.* ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು nನೇ ಪದ$=3\ (\frac{2}{3})^{n-1}$

5.7 Sum of n terms of a Geometric Progression—

Let $S=a+ar+ar^2+\dots\dots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$.

Multiplying both sides by r,

$$rS= ar+ar^2+\dots\dots\dots+ar^{n-1}+ar^n$$

Subtracting the lower equation from the upper, term by term, we get

$$S(1-r)=a-ar^n$$

$$\therefore\ S=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \qquad ..(5\cdot 5)$$

If $r>1$, we usually write $S=\dfrac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ ..(5.6)

We may call a, r, n, l, S the elements of the geometric progression.

Given any three elements, we can find the other two from formulae (5.4) and (5.5) or (5.6)

Examples :—(i) Find the sixth term and the sum to 6 terms of the geometric progression 3, 6, 12 24............

Here $a=3$, $r=2$ and $n=6$.

Applying formula (5.4),

6th term $=3.2^5=96$

Applying formula (5.6),

$$S=\frac{3(2^6-1}{(2-1)}=3.63=189$$

5·7 ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ಎಂದಿರಲಿ.
r ರಿಂದ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲಾಗಿ

$$rS = \quad ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$S(1-r) = a - ar^n$ ಎಂದಾಗುವುದು

$$\therefore \quad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \dots . (5.5)$$

$r > 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ

$S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ .... (5.6)

a, r, n, l, S ಇವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು (5.4), (5.5), ಅಥವಾ (5.6) ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 6ನೆಯ ಪದವನ್ನೂ, 6 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: —

3, 6, 12, 24,........

ಇಲ್ಲಿ $a=3$, $r=2$, $n=6$

(5.4) ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗಿ

6ನೆಯ ಪದ $= 3.2^5 = 96$

(5.6) ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗಿ

$$S = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = 3.63 = 189$$

(ii) The second term of a G.P. is 4 and the fifth term is 256.

Find the first and fourth terms.

Let first term $=a$, and common ratio $=r$

Then $ar^4=256$

$ar=4$

$\therefore \quad \frac{ar^4}{ar} = \frac{256}{4}$ or $r^3=64$

$\therefore \; r=4$ and $a=1$

Fourth term $=1.4^3=64$

5.8 Geometric Means—The terms between the first and last terms of a G.P. are called *geometric means.*

Examples :—(i) *Insert three geometric means between* 4 *and* 1/4.

The corresponding G.P. has 5 terms. Let r be the common ratio.

Then $1/4 = 4.r^4$

$\therefore \; r^4 = 1/16$ or $r = 1/2$

Hence the means are 2, 1, 1/2

(ii) *Find the Geometric mean between* 3 *and* 12.

Let the geometric mean be x, *i.e.* 3, x, 12 are in G.P.

Then $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

$\therefore \; x^2 = 36$ or $x=6$

(ii) ಒಂದು $G.P.$ಯ 2ನೇ ಪದ 4 ಮತ್ತು 5ನೇ ಪದ 256. ಅದರ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲಿನ ಪದ$=a$, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ$=r$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $ar^4=256$

$ar=4$

$\therefore \frac{ar^4}{ar}=\frac{256}{4}$ ಅಥವಾ $r^3=64$

$\therefore r=4,\ a=1$

4ನೆಯ ಪದ$=1.4^3=64$

5.8 ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳು

ಒಂದು G.P.ಯ ಮೊದಲಿನ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ನಡುವಣ ಪದಗಳನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) 4 ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯೆ 3 ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಈ $G.P.$ ಯಲ್ಲಿ 5 ಪದಗಳಿವೆ. r ಎನ್ನುವುದು ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿರಲಿ,

ಆಗ $\frac{1}{4}=4.r^4$

$\therefore r^4=\frac{1}{16}$ ಅಥವಾ $r=\frac{1}{2}$

$\therefore$ ಮಧ್ಯಕಗಳು 2, 1, $\frac{1}{2}$

(ii) 3 ಮತ್ತು 12ರ ನಡುವಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. x ಎಂಬುದು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕವಾಗಿರಲಿ,

$\therefore$ 3, x, 12 ಇವು GP ಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore \frac{x}{3}=\frac{12}{x},\quad x^2=36,\quad x=6$

Exercises 5.4

Find the last term and the sum of each geometric progression (1—6).

1 3, 6, 12 . . . to 5 terms

2 7, 21, 63 . . . . to 6 terms

3 27, 18, 12 . . to 5 terms

4 1, — 3, 9 . . . to 6 terms

5 81, — 27, 9 . . . to 5 terms

6 3,—2, 4/3.......to 6 terms

Insert the indicated number of geometric means between each pair of values (7—12).

7 3 and 48 ; 3 means

8 1/7 and 343 ; 3 means

9 — 1/8 and 128 ; 4 means

10 3/2 and 16/81 ; 4 means

11 256 and 1 ; 3 means

12 27 and 1/27 ; 5 means

13 Prove that for two unequal positive numbers a and b, the arithmetic mean is greater than the geometric mean.

14 Find the value of p so that $2p-3$, $4p-1$, and $13p+23$ are in $G.P$.

In exercises 15—20, three of the elements a, r, l, n and S of a geometric progression are given. Find the two missing elements.

15 $l = 98, r = 7, n = 5$

16 $a = 3/4, l = 24, r = 2$

17 $a = 12, r = 2/3, S = 76/3$

18 $r = -2/3, n = 4, S = 13/18$

19 $a = 3, r = 2, S = 189$

20 $l = 1, r = -\frac{1}{2}, S = -21$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.4 ಈ ಕೆಳಗಿನ $G.P.$ ಗಳಲ್ಲಿ (1—6) ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ೧ನೆಯ ಪದವನ್ನೂ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1 3, 6, 12,...........5 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

2 7, 21, 63,...........6 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

3 27, 18, 12,........5 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

4 1, -3, 9,.... ......6 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

5 81, -27, 9,............5 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

6 3, -2, $\frac{4}{3}$,..............6 ಪದಗಳ ವರೆಗೆ

ಈ ಕೆಳಗಿನ (7—12) ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳ ನಡುವೆ ಆಯಾ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ೧ಚಿಸಿರುವಷ್ಟು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7 3 ಮತ್ತು 48; 3 ಮಧ್ಯಕಗಳು

8 $\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು 343; 3 ಮಧ್ಯಕಗಳು

9 $-\frac{1}{8}$ ಮತ್ತು 128 ; 4 ಮಧ್ಯಕಗಳು

10 $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{16}{81}$; 4 ಮಧ್ಯಕಗಳು

11 256 ಮತ್ತು 1 ; 3 ಮಧ್ಯಕಗಳು

12 27 ಮತ್ತು 1/27 ; 5 ಮಧ್ಯಕಗಳು

13 ಎರಡು ಅಸಮ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯ ವು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14 $2p-3$, $4p-1$ ಮತ್ತು $13p+23$ $G.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ pಯ ಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15 ರಿಂದ 20ರ ವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ a, r, l, n, ಇವು S ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ೂರು ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದೆರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15 $l=98$, $r=7$, $n=5$

16 $a=\frac{3}{4}$, $l=24$, $r=2$

17 $a=12$, $r=\frac{2}{3}$, $S=76/3$

18 $r=\frac{2}{3}$, $n=4$, $S=13/18$

19 $a=3$, $r=2$, $S=189$

20 $l=1$, $r=-\frac{1}{2}$, $S=-21$

21 The population of a certain town is 10,000. If it increases by 5% each year, find the population at the end of five years.

22 The value of a car depreciates by 15% each year. If it was purchased for Rs. 18,000, find its value at the end of four years.

23 A man accepts a post with a starting salary of Rs. 3,600 per year with the understanding that he will receive a 10% increase every year for five years. What is his salary in the fifth year and what is his total income for the first five year period ?

5.9 The A. M., G. M., and H. M. of two positive quantities —Let a and b be two positive unequal quantities. Let their $A.M.$, $G.M.$ and $H.M.$ be respectively A, G and H. Then we have

(i) a, A, b are in $A.P.$

$$\therefore 2A = a + b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

(ii) a, G, b are in $G.P.$

$$\therefore \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$G = +\sqrt{ab}$ since a and b are both positive.

(iii) a, H, b are in HP

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ are in AP,

$$\therefore \frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\text{or } H = \frac{2ab}{a+b}$$

21 ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 10,000. ಅದು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ 5% ರದಲ್ಲಿ ಏರುತ್ತಿದ್ದರೆ 5 ವರ್ಷಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಆ ಪಟ್ಟಣದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

22 ಒಂದು ಕಾರಿನ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ 15% ನಷ್ಟು ಇಳುವರಿಯಾಗುವುದು. ವನ್ನು ರೂ. 18,000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುದಾಗಿದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ನರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

23 ವರ್ಷವೊಂದರ ರೂ 3,600 ಸಂಬಳದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ 10% ನಷ್ಟು ಬಡತಿ ದೊರೆಯುವಂತಹ ಒಂದು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಒಬ್ಬ ನುಷ್ಯನು ಸೇರುತ್ತಾನೆ. ಐದನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನ ಸಂಬಳವೆಷ್ಟು ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ದು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವನ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವೆಷ್ಟು ?

5·9 ಎರಡು ಧನಸಂಕೇತಗಳ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಧ್ಯಕಗಳು

a ಮತು b ಎರಡು ಧನ ಸಂಕೇತಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ, ಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, G ಮತ್ತು H ಗಿರಲಿ.

ಆಗ

(i) a, A, b $A.P.$ಯಲ್ಲಿವೆ.

$$2A = a+b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

(ii) a, G, b $G.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ.

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$G = +\sqrt{ab}$ a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡೂ ಧನ ಸಂಕೇತ ಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ.

(iii) a, H, b $H.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ.

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

Now, $A - G = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$

This is always positive. Therefore $A > G$

$$G - H = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,[a+b-2\sqrt{ab}]}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$$

This is always positive. Therefore $G > H$

$$\therefore\ A > G > H$$

In the special case when $a=b$

$$A = a,\ G = a,\ H = a$$

$\therefore\ A = G = H$ Therefore in general for t
positive quantities

$$\therefore\ A \geqslant G \geqslant H$$

Exercises 5.5

1 Prove that the AM, GM and HM between a
two positive quantities form a decreasing GP.

2 If $a, b, c,$ are in GP and $a^x = b^y = c^z$. Show th
x, y, z are in HP.

3 If $a, b, c,$ are in HP, $b, c, d,$ are in $G.P.$ a
$c, d, e,$ are in AP prove that

$$e = \frac{ab^2}{(2a-b)^2}$$

4. If $a, b, c,$ be in AP ; b, c, d be in GP ; and $c,$ d
in HP show that a, c, e are in GP.

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \quad \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

ಇದು ಸದಾ ಧನವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $A>G$

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}\,[a+b-2\sqrt{ab}]}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$$

ಇದು ಸದಾ ಧನವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $G>H$

$$\therefore\ A>G>H$$

$a=b$ ಎನ್ನುವ ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$A=a,\ G=a,\ H=a$$

$$\therefore\ A=G=H$$

ಆದುದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಧನಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ $A \geqslant G \geqslant H$

ಸಗಳು 5.5

1 ಎರಡು ಧನ ಸಂಕೇತಗಳ ನಡುವಣ ಸಮಾಂತರ, ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ರಿ.

2 a, b, c ಗಳು GP ಯಲ್ಲಿವೆ. ಮತ್ತು $a^x=b^y=c^z$. ಹಾಗಾದರೆ z HP ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3 a, b, c HP ಯಲ್ಲಿ, b, c, d GP ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು c, d, e AP ದ್ದರೆ

$$e=\frac{ab^2}{(2a-b)^2}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4 a, b, c AP ಯಲ್ಲಿ, b, c, d GP ಯಲ್ಲಿ, c, d, e HPಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ e GP ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5.10 Sum of a Geometric Progression with infinitel many terms.

We have proved that the sum S of n terms of th geometric progression

$$a, ar, ar^2 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$$

is given by $S=\dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ .... (5.5)

This may be written as $S=\dfrac{a}{(1-r)}-\dfrac{ar^n}{(1-r)}$

Suppose the number of terms n goes on increasin without ending. Then the geometric progression wi have *infinitely many* terms. In this case we cannot fin the sum *exactly*. However many terms we add fro the beginning, there will always be terms left over a the end. But there are many cases where the sur approaches closer and closer to a fixed value as we go c adding more and more terms. We shall examine whe this happens.

In the equation $S=\dfrac{a}{(1-r)}-\dfrac{ar^n}{(1-r)}$,

only the second term on the right changes as n increase

Suppose $r=\frac{1}{2}$. Then $r^n=(\frac{1}{2})^n$ becomes small and smaller as n becomes larger and larger. For examp for $n=10$, 100, 1000,..
$(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{10}$, $(\frac{1}{2})^{100}$, $(\frac{1}{2})^{1000}$....................

We conclude that when $r=1/2$, the term $\dfrac{ar^n}{1-r}$

approaches closer and closer to the value 0. Hence as becomes larger and larger, the sum S approaches clos and closer to the value $\dfrac{a}{1-r}$. Although we have or

5.10 ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವಂತಹ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಂ ...ತ್ತ

$a, r, ar^2 \ldots\ldots, ar^{n-1}$ ಎಂಬ n ಪದಗಳಿರುವ ಒಂದು ಗುಣೋ ...ರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ಸೂತ್ರವು ಕೊಡುವುದು ಎಂದು ...ವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. .... (5.5)

ಇದನ್ನು ನಾವು $S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಪದಗಳ ...ಂಖ್ಯೆ n ಎನ್ನುವುದು ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದಂತೆ ಏರುತ್ತಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ...ಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳಿರುವುವು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ನಾವೆಷ್ಟೇ ...ದಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿಂದ ತೊಡಗಿ ಕೂಡಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತಷ್ಟು ...ಪರಿಮಿತ ಪದಗಳು ಉಳಿದಿರುವುದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯ ನಿಖರವಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ...ಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ...ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾದ ಬೆಲೆಗೆ ಹತ್ತಿರಹತ್ತಿರವಾಗುವಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳು ...ಲವಾರಿವೆ. ಇದು ಯಾವಾಗ ಸಂಭವಿಸುವುದೆನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ n ಏರಿದಂತೆ

...ಲಬದಿಯ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಮಾತ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದು. $r=\frac{1}{2}$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ...$^n = (\frac{1}{2})^n$, ಇದರ ಬೆಲೆ n ಏರುತ್ತ ಏರುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ...ಹೋಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

...$=10, 100, 1000, \ldots\ldots$ ಆದಾಗ, $(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{10}, (\frac{1}{2})^{100}, (\frac{1}{2})^{1000}$ ......ಇತ್ಯಾದಿ

$r=\frac{1}{2}$ ಆಗುವಾಗ, $\frac{ar^n}{1-r}$ ಪದವು ಶೂನ್ಯಬೆಲೆಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದೆಂದು ...ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ n ನ ಬೆಲೆಯು ಏರುತ್ತ ಏರುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ...S ನ ಬೆಲೆಯು $\frac{a}{1-r}$ ಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ನಾವು $r=\frac{1}{2}$ ಎಂಬ

examined the case $r=\frac{1}{2}$ it is easy to see that r^n becomes smaller and smaller as n becomes larger and larger whenever r is a number *less than* 1 in magnitude.

Hence when the common ratio r of a geometric progression lies between -1 and $+1$, the sum of n terms approaches *arbitrarily close* to the value $\frac{a}{1-r}$ as n becomes *indefinitely large.* In this case we say that the sum to infinity of the geometric progression is

$$\frac{a}{1-r}$$

Examples :—(i) Find the sum to infinity of the infinite geometric progression

1, 1/2, 1/4, ...

Since the common ratio 1/2 is less than 1, the sum to infinity exists and is equal to $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(ii) Find the sum of the infinite geometric progression 1/2, — 1/6, 1/18, ...
Here $a=1/2$ and $r=-1/3$. Since $|r|<1$, the sum to infinity exists and is equal to $a/(1-r)=(1/2)/(1+1/3) = (1/2)/(4/3)=3/8$.

(iii) Convert the repeating decimal 3.3333 . . . . . into an equivalent common fraction.

The number 3.3333.... can be represented as the number 3 plus the sum of a geometric progression ;

$$\begin{aligned}3.3333\ldots &= 3+(3/10)+(3/100)+(3/1000)\ldots\ldots\\ &=3/(1-1/10), \text{ (sum to infinity where } a=3, r=1/10)\\ &=3\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೂ, r ಎನ್ನುವುದು ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ, n ನ ಬೆಲೆ ಏರುತ್ತ ಏರುತ್ತ ಹೋದಂತೆ r^n ನ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಸುಲಭ.

ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ r ಎನ್ನುವುದು -1 ಮತ್ತು $+1$ ಇವುಗಳ ನಡುವೆಯಿದ್ದಾಗ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು, n ನ ಬೆಲೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ಏರಿದಂತೆ $\frac{a}{1-r}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗೆ ನಾವೆಣಿಸಿದಷ್ಟು ಸಮೀಪವಾಗಿರುವುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತ (ಅಥವಾ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{a}{1-r}$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$

ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{1}{2}$ ವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆನ ಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಇದೆ. ಅದು $=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

(ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots\ldots\ldots$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a=\frac{1}{2}, \ r=-\frac{1}{3}. \quad |r|<1$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಇದೆ.

ಅದು $=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$

(iii) 3.3333............ಎಂಬ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

3.3333 .... ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ಎಂಬ ಸಂಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$3.3333\ldots = 3+.30000\ +.03000\ldots +.00300\ldots\ +.00030\ldots\ +.\ \ldots$$

$$=3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{3}{1-\frac{1}{10}} \quad \text{(ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, } a=3,\ r=\frac{1}{10}\text{)}$$

$$=3\tfrac{1}{3}$$

Exercises 5.6

Find the sum to infinity of each of the following geometric progressions 1—10.

1 $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$

2 27, 18, 12 . . . . . .

3 32, —8, 2 . . . .

4 $\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots$

5 $-11, -\frac{11}{4}, -\frac{11}{16}, \ldots$

6 0.2, 0.02, 0.002, . . .

7 0.1, 0.04, 0.016, . . .

8 7, —1.4, .28 . . . . .

9 $-27, 3, -\frac{1}{3}, \ldots$

10 1, —0.6, 0.36 . . . .

Convert each of the following repeating decimals into equivalent common fractions (11—16).

11 0.2222 . . . . .

12 2.9999 . . . . .

13 4.131313 . . . . .

14 0.123123123 . . . . .

15 4.121212 . . . .

16 0.363636 . . . . .

17 The sum of an infinite geometric progression is 11 and the first term is 3. Find the common ratio.

18 A ball rebounds 3/5 of the height from which it has fallen. If it is dropped from a height of 100 feet, find the distance it travels before coming to rest.

19 The length of the side of a square is 8 inches. A second square is inscribed by connecting the midpoints of the sides of the first square, a third by connecting the midpoints of the sides of the second, and so on. Find the sum of the areas of the infinitely many squares thus formed, including the first.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·6

ಕೆಳಗಿನ (1-10) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

1 $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}$...........

2 27, 18, 12,...........

3 32, −8, 2,...........

4 $\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}$,...........

5 $-11, -\frac{11}{4}, -\frac{11}{16}$.......

6 0·2, 0·02, 0·002,...........

7 0·1, 0·04, 0·016,...........

8 7, −1·4, ·28,...........

9 −27. 3, $-\frac{1}{3}$,...........

10 1, −0·6, 0·36,...........

ಕೆಳಗಿನ (11–16) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಶಮಾಂಶವನ್ನೂ ಸಮಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

11 0·2222........... 12. 2·9999...........

13 4·131313........... 14. 0·123123123........

15 4·121212........... 16. 0·363636...........

17 ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ 11· ಅದರ ಮೊದಲಿನ ಪದ 3. ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18 ಒಂದು ಚೆಂಡು ಅದು ಬಿದ್ದ ಎತ್ತರದ $^3/_5$ ರಷ್ಟು ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಪುಟನೆಗೆಯುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು 100 ಅಡಿ ಎತ್ತರದಿಂದ ಕೈಬಿಟ್ಟರೆ, ಆ ಚೆಂಡು ಸಂಪೂರ್ಣ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುವ ಮೊದಲು ಚಲಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೆಷ್ಟು?

19 ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ 8 ಇಂಚುಗಳು. ಇದರ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಎರಡನೆಯ ಚೌಕವನ್ನೂ, ಅದರ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಮೂರನೆಯ ಚೌಕವನ್ನು ಇತ್ಯಾದಿ ಇತ್ಯಾದಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ನಿರ್ಮಿತವಾದ ಎಲ್ಲ ಚೌಕಗಳ (ಒಂದನೆಯದರ ಸಮೇತ) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

CHAPTER 6

Permutations and Combinations

6.1 A Fundamental Principle.—We begin this chapter by considering a simple example. Suppose a cricket ground has 3 entrance gates and 2 exit gates. In how many different ways can you enter and leave the ground ?

In figure 6.1, the "In" gates are marked 1, 2, 3 and the "Out" gates are marked A, B. If you enter by gate 1, you can go out in 2 ways through the gates A or B. Similarly, there are 2 ways of leaving the ground corresponding



Fig. 6.1

to *each* of the "In" gates 2 and 3. The lines joining gates 1, 2, 3 to gates A, B indicate the different ways of entering and leaving the ground. Hence the total number of ways of *entering and leaving* is $2+2+2=3.2=6$. It is easy to extend this result to the case where the ground has m "In" gates and n "Out" gates. Then the total number of different ways of entering and leaving would be $m \times n$.

We generalise this idea in what is often called a *fundamental principle* : "If one thing can be done in m different ways, and another thing can be done independently in n different ways, then the two things together can be done in $m \times n$ different ways".

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು

6.1 ಒಂದು ಮೂಲ ಸೂತ್ರ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟದ ಬಯಲಿಗೆ ಮೂರು ಪ್ರವೇಶ ದ್ವಾರಗಳೂ ಎರಡು ನಿರ್ಗಮದ್ವಾರಗಳೂ ಇವೆಯೆಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಬಯಲೊಳಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿ ನಿರ್ಗಮಿಸಲು ನಿಮಗೆಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯ? 6.1 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ "ಪ್ರವೇಶ" ದ್ವಾರಗಳನ್ನು

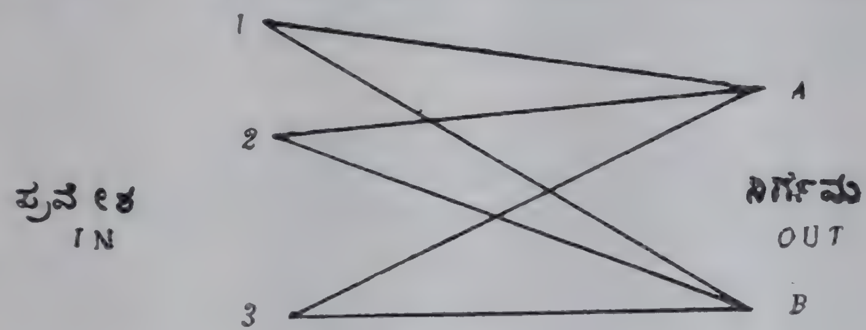


Fig. 6.1

1, 2, 3 ಎಂದೂ "ನಿರ್ಗಮ" ದ್ವಾರಗಳನ್ನು A, B ಎಂದೂ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೀವು ಒಂದನೆಯ ದ್ವಾರದಿಂದ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದರೆ A ಅಥವಾ B ದ್ವಾರದಿಂದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಎನ್ನುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದ್ವಾರದಿಂದ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದಾಗಲೂ ಎರಡು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ಗಮಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. 1, 2, 3 ದ್ವಾರಗಳನ್ನು A, B ದ್ವಾರಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಬಯಲನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಿ ನಿರ್ಗಮಿಸುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಆದುದರಿಂದ (ಪ್ರವೇಶ ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮನದ) ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $2+2+2=3.2=6$. ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು, ಬಯಲಿಗೆ m ಪ್ರವೇಶದ್ವಾರಗಳೂ n ನಿರ್ಗಮದ್ವಾರಗಳೂ ಇರುವಾಗಲೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಪ್ರವೇಶ ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮನದ ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $m \times n$ ಆಗುವುವು.

ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ: "ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಆದಾದನಂತರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅವೆರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ $m \times n$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ."

We can further extend this principle to three or more independent events : "If one thing can be done independently in m different ways, a second thing in n different ways, a third thing in p different ways, and so on, then the total number of different ways of doing the first *and* second *and* third etc., is $m \times n \times p$ . . . ."

Examples :

1 *A tennis club consists of* 8 *boys and* 5 *girls. In how many ways can a mixed doubles team (one boy and one girl) be chosen ?*

A boy can be chosen in 8 ways and a girl independently in 5 ways. Hence a team of a boy *and* a girl can be chosen in $8 \times 5 = 40$ ways.

2 *In an election there are* 4 *candidates for President,* 3 *for Vice-President,* 5 *for Secretary and* 2 *for Treasurer. How many different results are possible for the election ?*

The President can be elected in 4 ways, Vice-President in 3 ways, Secretary in 5 ways and Treasurer in 2 ways. The election of each office-bearer is independent of the other.

Hence the total number of ways of electing President *and* Vice-President *and* Secretary *and* Treasurer $= 4 . 3 . 5 . 2 = 120$.

6.2 Permutations—A permutation is an arrangement in some order of a set of objects. Take the digits 1, 2, 3, 4, 5. How many three-digit numbers can we form using each of these digits only once ? Writing down some of them, we have 123, 241, 532, 345 . . . . Each number may be regarded as an arrangement or permutation of the given five digits taken three at a time. The problem is to find out the *number* of such permutations. The student may try to write down all possible permutations of the given five digits taken three at a time, but he will soon find his task a long and laborious one.

ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಮೂರು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿದ್ದಾಗಲೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು: "ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅದಾದನಂತರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಅದಾದ ನಂತರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು p ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಅವೆಲ್ಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $m \times n \times p \times \ldots\ldots$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ."

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಕ್ಲಬ್ಬಿನಲ್ಲಿ 8 ಹುಡುಗರೂ 5 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ಸಮ್ಮಿಶ್ರ (ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ) ಡಬಲ್ಸ್ ಟೀಮನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನನ್ನು 8 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು, ಅದಾದನಂತರ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವಂತಹ ಒಂದು ಟೀಮನ್ನು $8 \times 5 = 40$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

2 ಒಂದು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 4, ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 3, ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 5 ಮತ್ತು ಕೋಶಾಧ್ಯಕ್ಷ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 2 ಉಮೇದುವಾರರು ಸ್ಪರ್ಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ ಇವೆ ?

ಅಧ್ಯಕ್ಷನನ್ನು 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷನನ್ನು 3, ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಯನ್ನು 5 ಮತ್ತು ಕೋಶಾಧ್ಯಕ್ಷನನ್ನು 2 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಾಹಕನ ಚುನಾವಣೆಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ಮತ್ತು ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿ ಮತ್ತು ಕೋಶಾಧ್ಯಕ್ಷ ಇವರನ್ನು ಚುನಾಯಿಸಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $= 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

6.2 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಯೋಜಿಸುವುದೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ. 1, 2, 3, 4, 5 ಎನ್ನುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇವುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು ? ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಬರೆದರೆ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : 123, 241, 532, 345,.......... ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ದತ್ತ 5 ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಮೂರರಂತೆ ಆರಿಸಿದ ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅಥವಾ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆ. ದತ್ತ 5 ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 3 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಕೆಲಸ ಬಹಳ ಪ್ರಯಾಸಕರವಾದದ್ದು ಎಂದು ಅವನು ಕೂಡಲೇ ಮನಗಾಣುತ್ತಾನೆ.

We proceed to solve this problem in a systematic manner, making use of the fundamental principle of para 6.1. Suppose we have 3 boxes placed side by side in a row as in figure 6.2. Then to form a permutation of 3 digits from the 5 digits, we have to place one digit in each of the 3 boxes. We can do this in an orderly manner, starting with the box on the left and proceeding step by step to the right. Now the first box can be filled up in five ways, since we can put any one of the 5 digits in this box. After placing a digit in this box, we have 4 digits left for the second box. Hence for *each* of the 5 ways of filling the first box, there are 4 ways of filling the second box. Therefore by the fundamental principle, the total number of ways of filling the first *and* the second boxes is $5 \times 4 = 20$. Again for each of these 20 ways of filling the first and second boxes, there will be 3 ways of filling the third box, corresponding to the 3 digits that will be left after filling the first 2 boxes in each case. Thus the total number of ways of filling the first *and* the second *and* the third boxes is $5 \times 4 \times 3 = 60$.

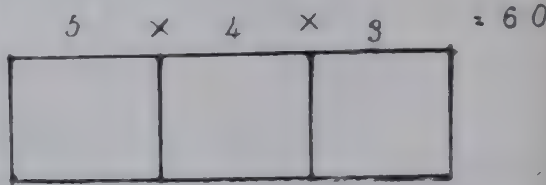


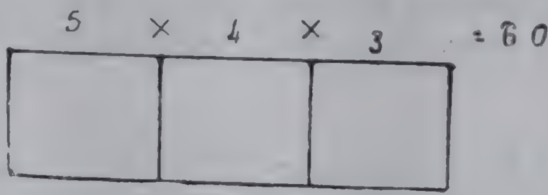
Fig. 6.2

Hence we see that there are 60 different three-digit numbers that can be formed from the 5 digits 1, 2, 3, 4, 5, using each digit only once. More generally we can say that *there are 60 different permutations of 5 different objects taken 3 at a time.* We denote this number by the symbol ${}_5P_3$. In words : ${}_5P_3$ = number of permutations of 5 different things taken 3 at a time. We have proved that ${}_5P_3 = 5.\ 4.\ 3 = 60$.

In general ${}_nP_r$ denotes the number of permutations of n different things taken r at a time and we have the important formula :

$$ {}_nP_r = n(n-1)\ (n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (n-r+1). \quad \ldots(6.1)$$

6.1 ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಮೂಲಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಲು ನಾವು ಮುಂದುವರಿಯೋಣ. ಚಿತ್ರ 6.2 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದರ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೊಂದರಂತೆ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ಇಡೋಣ. ಆಗ, 5 ಅಂಕೆಗಳಿಂದ 3 ಅಂಕೆಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಂದೊಂದು ಅಂಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇಡಬೇಕು. ಎಡಗಡೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿಬಲಗಡೆಗೆ ಹೆಜ್ಜೆ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ನಾವು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. 5 ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನೇ ಬೇಕಾದರೂ ಒಂದನೆಯ



ಚಿತ್ರ 6.2

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಡಬಹುದಾದುದರಿಂದ ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸಬಹುದು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕೆಯನ್ನಿಟ್ಟನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ಆರಿಸಲು 4 ಅಂಕೆಗಳು ಉಳಿದಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ 5 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಕ್ಕೂ ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಲು 4 ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಿಧಗಳಿವೆ. ಈಗ, ಮೂಲ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $5 \times 4 = 20$. ಪುನಃ, ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ 20 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಕ್ಕೂ ಮೂರನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು, ಮೊದಲಿನೆರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಈಗ ಉಳಿದಿರುವ 3 ಅಂಕೆಗಳಿಂದ, 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳು $5 \times 4 \times 3 = 60$.

ಆದುದರಿಂದ 1, 2, 3, 4, 5 ಎನ್ನುವ 5 ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಅಂಕೆಯನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಆರಿಸಿ 3 ಅಂಕೆಗಳ 60 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, 5 ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ 3ನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿದಂತಹ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 60, ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ${}_5P_3$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಾತಿನಲ್ಲಿ, ${}_5P_3 = 5$ ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 3ನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, P_3 $5 \times 4 \times 3 = 60$ ಎಂದು ನಾವೀಗ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ${}_nP_r$ ಎನ್ನುವುದು n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ rನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯಸೂತ್ರ ಲಭಿಸುವುದು.

$$ {}_nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots\,(n-r+1) \qquad \ldots\ldots(6.1) $$

Proof :

We consider the problem of finding the number of pe mutations of n different things taken r at a time as the san as finding the number of ways of filling r boxes, placed si by side, each with one object at a time. (see fig. 6.3)

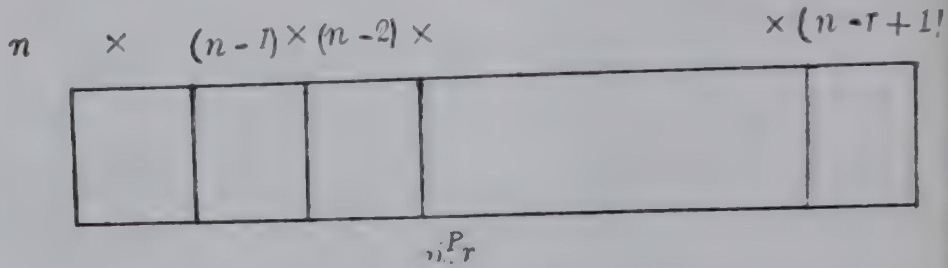


Fig. 6.3

Starting with the box on the left and proceeding sy tematically step by step to the right, we find that the fi box can by filled in n ways. For each of these n ways filling the first box, there are n-1 ways of filling the seco box. Hence, applying the fundamental principle, the are $n(n-1)$ ways of filling the first *and* second boxes. Aft filling the first and second boxes there are $n-2$ objects l for the third box. Hence the number of ways of filling t first, second and third boxes is $n\ (n-1)\ (n-2)$. Proceedi in this way we see that the number of ways of filling th boxes is $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$.

When $r=n$, the formula for the number of permutatio of n things taken *all* at a time is

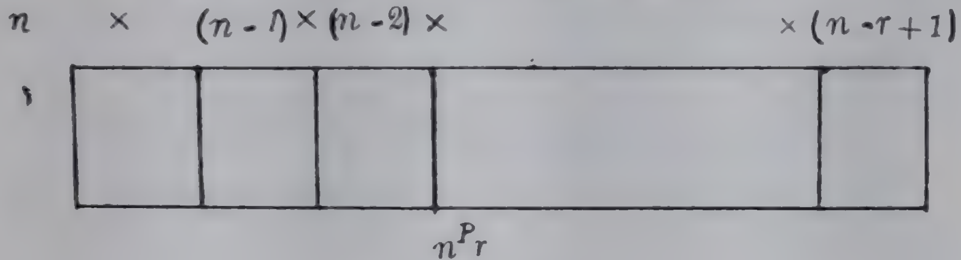
$${}_nP_n = n(n-1)\ (n-2)\ldots\ldots\ldots 3.\ 2.\ 1$$

We usually write 1.2.3.4............ $n = n\,!$ **or** $\angle n$.
$n\,!$ is read as "n factorial".

ಸಾಧನೆ :

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೆಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು, ಒಂದರ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದರಂತೆ ಸಾಲಾಗಿ ಇಟ್ಟಿರುವ r ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಗೆ, ಒಂದೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ಒಂದೊಂದು ವಸ್ತುವಿನಂತೆ ತುಂಬಿಸುವ ವಿಧಗಳೆಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿಯುವ ಲೆಕ್ಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 6.3ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಎಡಗಡೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಬಲಗಡೆಗೆ ಹೆಜ್ಜೆ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ನಾವು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು. ಒಂದನೆಯ



ಚಿತ್ರ 6.3

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ನಾವು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಒಂದನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಕ್ಕೂ ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು n-1 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಮೂಲಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $n(n-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತಂಬಿದನಂತರ ಮೂರನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಲು $n-2$ ವಸ್ತುಗಳು ಉಳಿಯುವುವು. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದನೆಯ, ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ವಿಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(n-1)\ (n-2)$ ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ r ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ವಿಧ $n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ldots\ldots(n-r+1)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$r=n$ ಆದಾಗ, n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಸಲ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು.

$${}_nP_n = n(n-1)\ \ (n-2)\ldots\ldots\ \ 3.2.1$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $1.2.3\ldots\ldots\ n=n!$ ಎಂದು ಅಥವಾ $\angle n$ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$n!$ ಇದನ್ನು "n ಶ್ರೇಣಿಲಬ್ಧ" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

Formula 6.1 can also be written as $_nP_r=\frac{n!}{n-r!}$

When $r=n$, this becomes $n!=\frac{n!}{0!}$

Hence we assume that $0!=1$

Examples :

1 A telephone dial has a hole for each of the 10 digits. How many telephone numbers are possible (*a*) each with four digits but with no digit repeated ; (*b*) each with four digits.

(*a*) Number required $={}_{10}P_4=10.9.8.7=5040$

(*b*) Each digit of the four-digit numbers can be selected in 10 ways.

Hence required number of four-digit numbers

$=10.\ 10.\ 10.\ 10=10{,}000.$

2 A student has 12 places on his shelf in which he wants to keep 5 Kannada, 4 English and 3 Hindi books. If he wants to keep books of the same language together in how many ways can they be placed on his shelf ?

The 5 Kannada books can be arranged in 5 ! ways, the 4 English books in 4 ! ways, the 3 Hindi books in 3 ! ways, and the 3 groups in 3 ! ways.

Hence the total number of different ways

$=5!\,4!\,3!\,3!=103{,}680.$

6.3 Permutations where some objects are alike

We shall first consider the simple problem of finding the total number of different five-digit numbers that can be formed from the digits 1, 1, 1, 2, 3. If the digits were a

6.1 ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$r = n \text{ ಆದಾಗ ಇದರ ಬೆಲೆ, } n! = \frac{n!}{0!}$$

ಆದುದರಿಂದ 0 ! ಇದರ ಬೆಲೆ 1 ಎಂದು ನಾವು ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. $0! = 1$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು :

1 ಒಂದು ಟೆಲಿಫೋನ್ ಫಲಕದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕೆಗೂ ಒಂದೊಂದರಂತೆ 10 ಕಂಡಿಗಳಿವೆ. (a) ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಆದರೆ ಯಾವ ಅಂಕೆಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸದಂತೆ ; (b) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳಿರುವಂತೆ — ಎಷ್ಟು ಟೆಲಿಫೋನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿವೆ ?

(a) ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $= {}_{10}P_{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

(b) ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕೆಯನ್ನೂ 10 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 10.10.10.10 = 10,000

2 ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿ 12 ಸ್ಥಳಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು 5 ಕನ್ನಡ, 4 ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು 3 ಹಿಂದೀ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಇಡಬೇಕೆಂದು ಬಯಸುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಂದು ಭಾಷೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಇಡಬೇಕೆಂದು ಅವನು ಬಯಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿಡಬಹುದು ?

5 ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 5 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು. 4 ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 4 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ, 3 ಹಿಂದೀ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 3 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು 3 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 5!\,4!\,3!\,3!$
$= 103,680$

6.3 ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವಾಗ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

1, 1, 1, 2, 3 ಈ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ 5 ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎನ್ನುವ ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅಂಕೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 5! ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ

different, the total number of permutations would be 5
Since three digits are the same, we should expect that th
number of different permutations in this case would b
less. Let P be the required number of different permuta
tions of the digits 1, 1, 1, 2, 3. Take any one of these per
mutations. Keeping the digits 2, 3 fixed, if we replace th
three 1's by different digits, we can form 3 ! different num
bers. If we perform this operation on all the P permuta
tions, we can form 3 ! P different numbers, in which all th
digits are different. But this must be the same as ${}_5P_5=5$

Hence $3!\ P=5!$

$$\therefore P=\frac{5!}{3!}=20$$

In general we have the following theorem :

*If P is the number of permutations of n things taken a
at a time, when p are of one kind, q are of another kind, r of
third kind, and so on, then*

$$P=\frac{n!}{p!\,q!\,r!\ \ldots\ldots} \qquad \ldots\ldots(6.2$$

Examples :

1 *How many permutations are there of the lette
ALGEBRA ?*

There are 7 letters of which 2 A's are alike.

$$\therefore\ P=\frac{7!}{2!}=\frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.1}=2520$$

2 *Signals are sent by arranging 12 flags in a horizont
line, consisting of 3 white flags, 4 red flags and 5 blue flag
How many different signals can be sent ?*

Here we have to apply formula (6.2) with $n=12$, $p=$
$q=4$ and $r=5$.

$$\therefore\ P=\frac{12!}{3!\,4!\,5!}=\frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.3.4.1.2.3.4.5}=27,7$$

ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಾವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ. 1, 1, 1, 2, 3 ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ P ಎಂದಿರಲಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. 2 ಮತ್ತು 3 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು ಉಳಿದಿರುವ ಮೂರು 1 ಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ ಈ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು 3! ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ, ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ, P ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಿಂದ $3!P$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಯಾವ ಅಂಕೆಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ${}_5P_5=5!$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದುದರಿಂದ $3!P=5!$

$$\therefore\ P=\frac{5\,!}{3\,!}\ =20$$

ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ: n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ p ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದು ರೀತಿಯವು. q ವಸ್ತುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯವು, r ವಸ್ತುಗಳು ಮೂರನೆಯ ರೀತಿಯವು. ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿರುವಾಗ, P ಎನ್ನುವುದು ಅವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದೇ ಸಲ ಆರಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ,

$$\boxed{\mathrm{P}=\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\ldots\ldots\ldots}} \qquad \ldots.(6.2)$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು:

1 *ALGEBRA* ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು?

ಇಲ್ಲಿ 7 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ Aಯು 2 ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ P=\frac{7!}{2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot}{2\cdot1}=2520$$

2 3 ಬಿಳಿ, 4 ಕೆಂಪು ಮತ್ತು 5 ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ 12 ಬಾವುಟಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಾಲಾಗಿಟ್ಟು ಸಂಜೆ ಗಳನ್ನು ಕಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ ಎಷ್ಟು ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕಳಿಸಬಹುದು?

ಇಲ್ಲಿ (6·2)ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬೇಕು. $n=12$, $p=3$, $q=4$ ಮತ್ತು $r=5$.

$$\therefore\ P=\frac{12!}{3!4!5!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2,1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=27,720$$

6.4 Circular permutations.—Suppose 4 students are be seated around a table. How many different arrang ments are possible ? We may first let one of the studer take any chair. The remaining 3 can then be seated in different ways. We can easily see that no other differe arrangement is possible. In general, if we have to arran n different objects in a circle, the total number of *circul permutations* is $(n-1)$!

Example :

8 different coloured beads can be made into a brace in 7 ! ways.

Exercises 6.1

1 Evaluate ${}_4P_1 + {}_4P_2 + {}_4P_3 + {}_4P_4$

2 Show that ${}_{n+1}P_r = (n+1) \; {}_nP_{r-1}$

3 How many numbers of four different digits can formed from the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ? How many these numbers are odd ? How many are less than 5000 ?

4 How many different batting orders are possible fo cricket team of eleven players ?

5 How many ways can a class elect a President, Vi President, Secretary and Treasurer from a class of students ?

6 In how many ways can three boys and two girls seated in a row containing five seats (*a*) if they may anywhere (*b*) if the boys and girls must alternate ?

7 In how many ways can three boys and three gi be seated in a row containing six seats (*a*) if they may anywhere (*b*) if the boys and girls must alternate ?

6.4 ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಕೂರಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಏರ್ಪಾಡುಗಳು ಸಾಧ್ಯ? ನಾವು ಮೊದಲು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸೋಣ. ಇನ್ನುಳಿದ ಮೂವರನ್ನು 3! ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು. ಬೇರೆ ಯಾವ ವಿಧದ ಏರ್ಪಾಡೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, n ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅಂತಹ ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $(n-1)!$ ಆಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ:

8 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳನ್ನು ಪೋಣಿಸಿ ಒಂದು ಕಡಗವನ್ನು 7! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6·1

1 ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ $_4P_1+{}_4P_2+{}_4P_3+{}_4P_4$

2 $_{n+1}P_r=(n+1)\ {}_nP_{r-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3 1,2,3,4,5, 6,7, ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಷಮ? ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿವೆ?

4 11 ಆಟಗಾರರಿರುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಟೀಮಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದ ಬೇಟಿಂಗ್ (ಆಟವಾಡುವ) ಕ್ರಮಗಳು ಸಾಧ್ಯ?

5 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ ಒಬ್ಬ ಅಧ್ಯಕ್ಷ, ಒಬ್ಬ ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷ, ಒಬ್ಬ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಕೋಶಾಧ್ಯಕ್ಷರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಚುನಾಯಿಸಬಹುದು?

6 5 ಆಸನಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 2 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು—

(a) ಅವರೆಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಕೂರಬಹುದು;

(b) ಹುಡುಗ, ಹುಡುಗಿಯರು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಕೂರಬೇಕು

ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು?

7 6 ಆಸನಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 3 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು—

(a) ಅವರೆಲ್ಲಿಬೇಕಾದರೂ ಕೂರಬಹುದು;

(b) ಹುಡುಗ, ಹುಡುಗಿಯರು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಕೂರಬೇಕು ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು?

8 How many licence plates can be made using any three *letters* for the first three places and any four digits for the last four ?

9 In how many ways can six people be seated in a row of six seats if two people insist on sitting next to each other ?

10 In how many ways can six people be seated around a table ?

11 In how many ways can six people be seated around a table if two people insist on sitting next to each other ?

12 Repeat problem 8 with the condition that no letter or number should be repeated.

13 How many permutations are there of the letters of the word (*a*) *Calcutta* (*b*) *Mathematics* ?

14 In how many ways can a bracelet be made with nine coloured beads ?

15 Signals are sent by hanging eight flags in a horizontal line, of which 2 are green, 3 white and 3 blue. How many different signals can be sent ?

16 A student wishes to arrange his books on a shelf. Six are in mathematics, four in physics and three in chemistry. How many arrangements are possible if books of the same subject are to be together ?

17 In how many ways can 8 boys sit around a table, if two particular boys (*a*) are next to each other, (*b*) are to be separated from each other ?

6.5 Combinations. In a permutation we are concerned, not only with a set of elements, but also with their ordering or arrangement. Unlike a permutation, a *combination* is a mere selection of objects with no regard to any

8 ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಆರಿಸಿ ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಲೈಸೆನ್ಸ್ ಪ್ಲೇಟುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು ?

9 ಒಟ್ಟು 6 ಜನರಿರುವಲ್ಲಿ, ಇಬ್ಬರು ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪವೇ ಕೂರಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟು ಹಿಡಿದರೆ, ಆ ಆರು ಮಂದಿಯನ್ನು ಸಾಲಾದ ಆರು ಆಸನಗಳ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು ?

10 ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಆರು ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು ?

11 ಒಟ್ಟು 6 ಜನರಿರುವಲ್ಲಿ, ಇಬ್ಬರು ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪವೇ ಕೂರಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟು ಹಿಡಿದರೆ. ಅವರನ್ನು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು ?

12 ಅಭ್ಯಾಸ 8 ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಕ್ಷರವೂ, ಅಂಕೆಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಕೂಡದೆಂದಾದರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

13 ಕೆಳಗಿನ ಪದಗಳ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು

(a) CALCUTTA ; (b) MATHEMATICS ?

14 9 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳನ್ನು ಪೋಣಿಸಿ ಒಂದು ಕಡಗವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ?

15 2 ಹಸುರು, 3 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 3 ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಬಾವುಟಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಾಲಾಗಿಟ್ಟು ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ ಎಷ್ಟು ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕಳಿಸಬಹುದು ?

16 ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿ ಓರಣವಾಗಿ ಇಡ ಬಯಸುತ್ತಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 6 ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ್ದು, 4 ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ್ದು ಮತ್ತು 3 ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರದ್ದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಏರ್ಪಾಡುಗಳು ಸಾಧ್ಯ ?

17 8 ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ 2 ಹುಡುಗರು (a) ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪ ಕೂರಬೇಕೆಂದು ; (b) ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪ ಕೂರಬಾರದೆಂದು ಅಪೇಕ್ಷೆ ಪಟ್ಟರೆ ಆ ಹುಡುಗರು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಬಹುದು ?

6·5 ವಿಕಲ್ಪಗಳು—ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ. ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸದೆ ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಆರಿಸುವಿಕೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಗಮನವೀಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ವಿಕಲ್ಪ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

particular order or arrangement. For example suppose w have to select a committee of three from among fiv students, whom we shall denote by the letters A, B, C, and E. One selection may consist of (A,B,C) This commi ttee will be the same whether we call it $(A,B,C.)$ or $(B,C,A$ or (C,A,B).

Now suppose there are n different objects and we hav to select r objects at a time. The total number of suc combinations is denoted by the symbol ${}_nC_r$. We shall nov prove the following important formula :

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \ldots (6.3$$

Proof :

Take any one of the ${}_nC_r$ combinations of r differen objects. These r objects can be arranged into $r\,!$ differen permutations. Hence taking each combination in tur we can form $r\,!$ different permutations. If we perform th operation with all the ${}_nC_r$ combinations, we shall obtai $r\,!\,{}_nC_r$ different permutations. But these are also all th possible permutations of n different objects taken r at time. Hence we have

$$r\,!\,{}_nC_r = {}_nP_r$$

$$= \frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$

$$\therefore\ {}_nC_r = \frac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}$$

6.6 Some Important Deductions

I Putting $n-r$ for r in formula (6.3), we obtain

$${}_nC_{n-r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!r\,!}$$

ಆದುದರಿಂದ ಸ್ಥಾನವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ವಿಕಲ್ಪವೆನ್ನಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಐದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು A, B, C, D ಮತ್ತು E ಎಂದಿರಲಿ. ಒಂದು ಆರಿಸಿದ ಸಮಿತಿ (A, B, C) ಆಗಿರುವುದು. ಈ ಸಮಿತಿಯನ್ನು (A, B, C) ಅಥವಾ (B, C, A) ಅಥವಾ (C, A, B) ಹೇಗೆಯೇ ಕರೆದರೂ ಅದು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು.

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿವೆಯೆಂದೂ ಅವುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಬೇಕೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದು ವಿಕಲ್ಪದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಎಲ್ಲ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ${}_nC_r$ ಎನುವ ಸಂಕೇತದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವೀಗ ಸಾಧಿಸೋಣ.

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}} \qquad \ldots(6{\cdot}3)$$

ಸಾಧನೆ :

r ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿರುವ ${}_nC_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಪ್ರಕಾರ $r!$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಕಲ್ಪವನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿರುವ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿ $r!$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ${}_nC_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳಿಂದ $r!\ {}_nC_r$ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಆದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹೌದು.

$$\therefore\ r!\ {}_nC_r = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore\ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

6.6 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಅನುಮಿತಗಳು

I ಸೂತ್ರ (6.3) ರಲ್ಲಿ :

r ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $n-r$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad \text{ಎಂದಾಗುವುದು.}$$

Comparing with formula (6.3), we obtain the importa[nt] result

$$\boxed{{}_nC_{n-r} = {}_nC_r} \qquad \ldots.(6.$$

This can also be deduced from the fact that each tim[e] we select r objects there will be a combination of $n-$[r] objects left, so that the number of ways of selecting r objec[ts] out of n is the same as of selecting $n-r$ objects.

II Formula (6.3) can also be written in the form

$${}_nC_r = \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots r}} \qquad \ldots.(6.$$

This form is usually easier to use for calculation. Bot[h] numerator and denominator on the right hand side contai[n] r factors each.

III The following results can easily be proved usin[g] formula (6.3)

(i) ${}_nC_n = {}_nC_o = 1$

(ii) ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$

Proof of (ii) :

$${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} + \frac{n\,!}{(r-1)\,!\,(n-r+1)\,!}$$

$$= \frac{n\,!}{(r-1)\,!\,(n-r)\,!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n\,! \qquad (n+1)}{(r-1)\,!\,(n-r)\,!\;r\;(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{r\,!(n+1-r)\,!}$$

$$= {}_{n+1}C_r$$

ಇದನ್ನು (6.3) ಸೂತ್ರದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಮಗೊಂದು ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\boxed{{}_nC_{n-r} = {}_nC_r} \quad \text{....(6·4)}$$

ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ತರ್ಕದಿಂದಲೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು : ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲ r ವಸ್ತುಗಳದ್ನು ಆರಿಸುವಾಗ $n-r$ ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ವಿಕಲ್ಪ ಉಳಿದಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ $n-r$ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ.

II (6.3) ಸೂತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n(n-1)\ (n-2)........(n-r+1)}{1.2.3.......\ r}} \quad \text{....(6.5)}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವಾಗ ಈ ರೂಪವು ಸುಲಭ. ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ r ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ,

III 6.3 ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು

(i) ${}_nC_n = {}_nC_o = 1$

(ii) ${}_rC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$

ಇವುಗಳನ್ನುವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

(ii) ರ ಸಾಧನೆ :

$${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r)!} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!\ \ (n+1)}{(r-1)!\ (n-r)!\ r\ (n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!\ (n+1-r)!}$$

$$= {}_{n+1}C_r$$

Examples :

1 Evaluate ${}_{16}C_{13}$

Using formulae (6.4) and (6.5), we have, with $n=16$, $r=13$, $n=r-3$,

$$
\begin{aligned}
{}_{16}C_{13} &= {}_{16}C_3 \\
&= \frac{16.15.14}{1.\ 2.\ 3} \\
&= 560
\end{aligned}
$$

2 *In a class of 20 boys and 12 girls, in how many ways can a committee made up of 3 boys and 2 girls be selected ?*

3 boys can be selected in ${}_{20}C_3$ ways.

2 girls can be selected in ${}_{12}C_2$ ways.

Hence by the fundamental principle of para (6·1), the total number of ways of selecting 3 boys *and* 2 girls is

$$
\begin{aligned}
{}_{20}C_3 \cdot {}_{12}C_2 &= \frac{20.19.18}{1\ .\ 2\ .\ 3} \cdot \frac{12.11}{1.\ 2} \\
&= 75{,}240
\end{aligned}
$$

3 *In a certain examination, a student has to answer 4 out of 6 questions in Part A, and 3 out of 5 questions in Part B In how many ways can he select his questions ?*

In Part A, he can select his questions in ${}_6C_4$ ways.

In Part B he can select his questions in ${}_5C_3$ ways.

Hence the total number of ways of selecting questions in Part A *and* Part B together is

$$
\begin{aligned}
{}_6C_4 \cdot {}_5C_3 &= \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{5.4}{1.2} \\
&= 150
\end{aligned}
$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು :

1 $_{16}C_{13}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6.4) ಮತ್ತು (6.5) ಸೂತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾರ

$n=16, \quad r=13, \quad n-r=3,$

$$_{16}C_{13} = {_{16}C_3}$$
$$= \frac{16.15.14}{1.2.3}$$
$$= 560$$

2 20 ಹುಡುಗರೂ 12 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ 3 ಹುಡುಗರೂ 2 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವಂತಹ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

3 ಹುಡುಗರನ್ನು $_{20}C_3$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

2 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು $_{12}C_2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ, (6.1) ರ ಮೂಲ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, 3 ಹುಡುಗರೂ, 2 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವಂತಹ ಸಮಿತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$$_{20}C_3 \cdot {_{12}C_2} = \frac{20.19.18}{1.2.3} \cdot \frac{12.11}{1.2}$$
$$= 75240$$

3 ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು A ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ 4 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ, B ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ 5 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ 3 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಆರಿಸಿ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಅವನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು ?

A ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು $_6C_4$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

B ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು $_5C_3$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ವಿಭಾಗಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಗಳು.

$$_6C_4 \cdot {_5C_3} = \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3}$$
$$= 150$$

Exercise 6.2

1 Find the value of (a) ${}_8C_3$ (b) ${}_{10}C_4$ (c) ${}_{25}C_{23}$

2 Find the value of ${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$

3. In how many ways can a team of 4 students b chosen from a class of 30?

4. In a cricket league there are 10 teams competin How many games must be played if each team has to pla every other team twice?

5. In a class social there were 40 students and teachers present. Each student had to shake hands wit every other student and also with each of the teacher How many handshakes were there?

6. A cricket team is to be selected from among 1 players of whom 5 are bowlers and 2 are wicket-keeper In how many ways can the eleven be selected so as t include at least one wicket-keeper and at least 4 bowlers?

7. How many triangles are determined by ten poin no three of which are in the same line?

8. How many different sums of money can be forme from a rupee coin, 50 paise coin, 25 paise coin, 10 paise co and 5 paise coin, if at least 2 coins are used?

9. How many parallelograms are formed by a set 4 parallel lines intersecting another set of 6 parallel lines?

10. How many circles are determined by 9 poin no four of which lie on the same circle?

11. In joining a college course, a student may choo any one of three languages in Part I, and any three seven optional subjects in Part II. In how mar different ways can be choose his course?

12. In how many ways can 12 different prizes l divided between 3 students so that each receives 4?

13. Prove the relation $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1 ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ : (a) ${}_8C_3$; (b) ${}_{10}C_4$; (c) ${}_{25}C_{23}$

2 ${}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5$ ಇದರ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

3 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತಂಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

4 ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಾಟದ ಕೂಟದಲ್ಲಿ 10 ಟೀಮುಗಳು ಸ್ಪರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಟೀಮು ಇನ್ನೊಂದು ಟೀಮಿನೊಡನೆ ಎರಡು ಸಲ ಆಡಬೇಕಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಆಟಗಳನ್ನು ಆಡಬೇಕಾಗುವುದು ?

5 ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಸಂತೋಷಕೂಟದಲ್ಲಿ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ 5 ಉಪಾಧ್ಯಾಯರೂ ಭಾಗಿಗಳಾಗಿದ್ದರು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ಇತರ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ, ಎಲ್ಲ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೂ ಹಸ್ತ ಲಾಘವ ನೀಡಬೇಕೆಂದಿದ್ದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲಾಘವಗಳು ನಡೆದುವು ?

6 16 ಆಟಗಾರರಿಂದ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಟೀಮ್ ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ 16 ಮಂದಿಯಲ್ಲಿ 5 ಮಂದಿ ಬೌಲರರೂ, 2 ಮಂದಿ ವಿಕೆಟ್‌ಕೀಪರರೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಬ್ಬ ವಿಕೆಟ್‌ಕೀಪರನೂ, 4 ಬೌಲರರೂ ಇರುವಂತಹ 11 ಜನರ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಟೀಮ್‌ನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

7 10 ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೂ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

8 ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯ, 50 ಪೈಸೆ, 25ಪೈಸೆ, 10 ಪೈಸೆ ಮತ್ತು 5 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನಾದರೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹಣದ ಎಷ್ಟು ವಿಧದ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

9 4 ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ಗಣ 6 ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ಗಣವನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ರಚಿತವಾಗುತ್ತವೆ ?

10 9 ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ 4 ಬಿಂದುಗಳೂ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ 9 ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ವೃತ್ತಗಳು ರಚಿತವಾಗುತ್ತವೆ ?

11 ಕಾಲೇಜು ವ್ಯಾಸಂಗವನ್ನು ಮಾಡಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೂರುಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಏಳು ಐಚ್ಛಿಕ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರನ್ನೂ ಆರಿಸಬಹುದು. ಅವನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಷೆ ಮತ್ತು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ತನ್ನ ವ್ಯಾಸಂಗವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು ?

12 ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೂ ನಾಲ್ಕು ಬಹುಮಾನಗಳು ಬರುವಂತೆ 12 ವಿವಿಧ ಬಹುಮಾನಗಳನ್ನು 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹಂಚಬಹುದು ?

13 ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ : $r.\ {}_nC_r = n.\ {}_{n-1}C_{r-1}$

CHAPTER 7

Mathematical Induction

7.1 Introduction—One of the important methods of proof in mathematics is that of mathematical induction. It is usually employed for proving a formula involving all positive integral values of n.

7.2 Method of Proof—A proof by mathematical induction consists of three parts.

(*a*) The formula is verified for small values of n say $n=1, 2, 3$.

(*b*) We assume the formula to be true for any value $n=m$ and then show that it must also be true for the next value $n=m+1$.

(*c*) *Conclusion.*—We know the formula is true for $n=1, 2, 3$. Since it is true for $n=3$, it follows from (*b*) that it is true for $n=3+1=4$; since it is true for $n=4$, it is also true for $n=5$; and so on for all integral values of n.

Examples :

(1) Prove by the method of mathematical induction that

$$1^2+2^2+3^2+ \quad +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಗಣಿತಾನುಮಾನ

7.1 ಪೀಠಿಕೆ—ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆ ನೀಡುವ ಹಲವಾರು ಮುಖ್ಯವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಾನುಮಾನವು ಒಂದಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

7.2 ಸಾಧನೆಯಕ್ರಮ—ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಕೊಡುವ ಸಾಧನೆಯು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ.

(*a*) ಸೂತ್ರವನ್ನು nನ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಅಂದರೆ $n=1, 2, 3$ ಇವುಗಳಿಗೆ, ತಾಳೆನೋಡಲಾಗುವುದು.

(*b*) ಸೂತ್ರವು nನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ $n=m$ ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು ಮುಂದಿನ ಬೆಲೆಯಾದ $n=m+1$ ಗೂ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(*c*) ನಿರ್ಧಾರ : ಸೂತ್ರವು $n=1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು 3ಕ್ಕೆ ಸತ್ಯವಾದುದರಿಂದ, (*b*) ಯಿಂದ ಸೂತ್ರವು $n=3+1=4$ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯವೆಂದು ವೇದ್ಯವಾಗುವುದು ; $n=4$ ಬೆಲೆಗೆ ಇದು ಸತ್ಯವಾದುದರಿಂದ, $n=5$ ಬೆಲೆಗೂ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ; ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ nನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು (1) ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

(*a*) We verify the formula for $n=1, 2, 3$.

$$n=1, \quad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \text{ or } 1=1$$

$$n=2, \quad 1^2+2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \text{ or } 5=5$$

$$n=3, \quad 1^2+2^2+3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \text{ or } 14=14$$

Hence the formula is true for $n=1, 2, 3$.

(*b*) We assume the formula to be true for $n=m$ *i.e.* we assume that

$$1^2+2^2+ \ldots +m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Now add $(m+1)^2$ to both sides. We get

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+(m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2$$

$$= \frac{(m+1)}{6}[2m^2+m+6m+6]$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Which is the value obtained by putting $n=m+1$ in

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hence if the formula is true for $n=m$, it must also be true for $n=m+1$

(*c*) *Conclusion.*—We have proved the formula to be true for $n=1, 2, 3$. Hence by (*b*) it must be true for $n=3+1=4$; $n=4+1=5$; and so on, for all integral values of n.

(*a*) $n=1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

$$n=1, \quad 1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{9} \text{ ಅಥವಾ } 1=1$$

$$n=2, \quad 1^2+2^2=\frac{2\cdot3\cdot5}{6} \text{ ಅಥವಾ } 5=5$$

$$n=3, \quad 1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot7}{6} \text{ ಅಥವಾ } 14=14$$

$\therefore$ ಸೂತ್ರವು $n=1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(*b*) $n=m$ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)\,(2m+1)}{6}$$

ಈಗ $(m+1)^2$ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೂ ಕೂಡಿಸಿ.

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2$$

$$=\frac{(m+1)}{6}\left[2m^2+m+6m+6\right]$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ಇದರಲ್ಲಿ $n=m+1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಿದ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $n=m$ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರವು ಸತ್ಯವಾದರೆ ಅದು $n=m+1$ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

(*c*) ಸೂತ್ರವು $n=1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (*b*) ಯಿಂದ ಸೂತ್ರವು $n=3+1=4$; $n=4+1=5$; ಇತ್ಯಾದಿ n ನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

2 Prove by mathematical induction that

$$2+2^2+2^3+\dots\dots+2^n=2^{n+1}-2$$

(*a*) for $n=1$, $2=2^2-2$ *or* $2=2.$

$n=2$, $2+2^2=2^{2+1}-2$ *or* $6=6$

$n=3$, $2+2^2+2^3=2^{3+1}-2$ *or* $14=14$

Hence the formula is true for $n=1, 2, 3$

(*b*) Assume the formula true for $n=m$, namely suppose $2+2^2+2^3+\dots\dots+2^m=2^{m+1}-2.$

Adding 2^{m+1} to both sides, we get

$$2+2^2+2^3+\dots\dots+2^m+2^{m+1}=2.\ 2^{m+1}-2$$
$$=2^{m+2}-2$$

But $2^{m+2}-2$ is the value of $2^{n+1}-2$ for $n=m+1$.

Hence if the formula is true for $n=m$, it must also be true for $n=m+1$.

(*c*) We know the formula is true for $n=1, 2, 3.$

Hence by (*b*) it must be true for $n=3+1=4$; $n=4+1=5$ and so on, for all integral values of n.

Exercises 7.1

Prove by the method of mathematical induction that the following formulae are true for all positive integral values of n.

1 $1+3+5+\ .\ .\ .+(2n-1)=n^2.$

2 $2+4+6+\ .\ .\ \ +2n=n(n+1)$

3 $1+4+4^2+\ .\ .\ \ +4^{n-1}=\dfrac{4^n-1}{3}$

4 $1^2+3^2+5^2+\ .\ .+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

2 ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ—

(a) $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n = 2^{n+1}-2$

$n = 1, \quad 2 = 2^2-2$ ಅಥವಾ $2 = 2$

$n = 2, \quad 2+2^2 = 2^{2+1}-2$ ಅಥವಾ $6 = 6$

$n = 3, \quad 2+2^2+2^3 = 2^{3+1}-2$ ಅಥವಾ $14 = 14$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು $n = 1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(b) $n = m$ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರವು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ—

$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^m = 2^{m+1}-2$ ಎಂದಿರಲಿ

ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೂ 2^{m+1} ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^m + 2^{m+1} = 2\cdot2^{m+1}-2$$
$$= 2^{m+2}-2$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದರೆ $2^{m+2}-2$ ಎನ್ನುವುದು $n = m + 1$ ಆದಾಗ $2^{n+1}-2$ ಇದರ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು $n = m$ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾದರೆ ಅದು $n = m + 1$ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

(c) ಸೂತ್ರವು $n = 1, 2, 3$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (b) ಯಿಂದ ಸೂತ್ರವು $n = 3 + 1 = 4$; $n = 4 + 1 = 5$; ಇತ್ಯಾದಿ n ನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7.1

ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು n ನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ—

1 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

3 $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \dfrac{4^n-1}{3}$

4 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

5 $1^3+2^3+3^3+\;.\;.\;+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

6 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

7 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

8 $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

9 $1.2+3.4+5.6+\;.\;.\;+(2n-1)2n$

$$=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

1 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\;.\;.\;.\;+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

5 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3 = \dfrac{n^2 (n+1)^2}{4}$

6 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots. + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

7 $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots. + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

8 $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots. + n(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

9 $1.2 + 3.4 + 5.6 + \ldots. + (2n-1)\,2n$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

10 $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \ldots.$

$$+ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

CHAPTER 8

The Binomial Theorem

8.1 The Binomial Theorem

By actual multiplication, we can easily verify th following expansions :

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

We note the following properties of the above *binomi expansions.*

1 The number of terms in any expansion is one mo than the exponent (or index) of $a+b$. Thus $(a+b)^2$ co tains 3 terms. $(a+b)^3$ contains 4 terms. $(a+b)^4$ contains terms, and so on.

2 The first term in the expansion of $(a+b)^n$ is a^n f $n=1, 2, 3, 4$.

3 The exponent of a decreases by one and the expone of b increases by one from any term to the next term.

4 Each of the coefficients can be expressed as a val ${}_nC_r$ for suitable values of n and r. For example

$$(a+b)^3={}_3C_0\,a^3+{}_3C_1\,a^2b+{}_3C_2\,ab^2+{}_3C_3b^3,\text{ and}$$
$$(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4.$$

From these observations we may expect a similar e pression for the expansion of $(a+b)^n$, where n is any po tive integer. Thus we have the *Binomial Theorem* : F any positive integer n,

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots+{}_nC_r\,a^{n-r}\,b^r+\ldots b^n \quad \ldots(8$$

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

8.1 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ (ಬೀಜಗಣಿತದ) ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು—

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

ಮೇಲಣ ದ್ವಿಪದ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

1 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(a+b)$ ಯ ಘಾತದ ಬೆಲೆಗಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು. $(a+b)^2$ ಯಲ್ಲಿ 3 ಪದಗಳಿವೆ, $(a+b)^3$ ಯಲ್ಲಿ 4 ಪದಗಳಿವೆ, $(a+b)^4$ ಯಲ್ಲಿ 5 ಪದಗಳಿವೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.

2 $(a+b)^n$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರಥಮ ಪದ ($n=1, 2, 3, 4$ ಆದಾಗ) a^n.

3 ಒಂದು ಪದದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಸಾಗುವಾಗ a ಯ ಘಾತವು ಒಂದು ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು, b ಯ ಘಾತವು ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದು.

4 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವನ್ನೂ n ಮತ್ತು r ಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಬೆಲೆ ಕೊಡುವುದರ ಮೂಲಕ ${}_nC_r$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$(a+b)^3={}_3C_0\, a^3+{}_3C_1\, a^2\, b+{}_3C_2 a\, b^2+{}_3C_3 b^3 \text{ ಮತ್ತು}$$
$$(a+b)^4={}_4C_0 a^4+{}_4C_1 a^3\, b+{}_4C_2 a^2\, b^2+{}_4C_3 a\, b^3+{}_4C_4 b^4$$

ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ n ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $(a+b)^n$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಗೂ ಇಂತಹದೇ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಾವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ ದೊರೆಯುವುದು. n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1\, a^{n-1}\, b+{}_nC_2 a^{n-2}b^2+ \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}\, b^r +\cdots+b^n \qquad \ldots(8{\cdot}1)$$

First Proof: $(a+b)^n$ is the product of n equal factors.

i.e. $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \dots\dots\dots (a+b)$.

To obtain any term in the expansion, we have to selec either a or b from each factor and multiply the n letters s chosen.

If we select a from each factor and multiply the n a together, we get the term a^n. Since this can be done i only one way, the coefficient of this term is 1.

To obtain terms $a^{n-1}b$, we have to select b from or factor and multiply it by $(n-1)$ a's from the remainin factors. But b can be selected from any one of the factors in $_nC_1$ ways. Hence we get the term $_nC_1$ a^{n-1} For the term $a^{n-2}b^2$, we have to select b from any factors, and a from the remaining $(n-2)$ factors. A this can be done in $_nC_2$ ways, we get the term $_nC_2\, a^{n-2}\, b^3$.

Proceeding in this manner, we easily see that for an value of r from 0 to n inclusive, we obtain the ter $_nC_r\, a^{n-r}\, b^r$. The sum of all such terms gives the expansio required.

Second Proof. By Mathematical Induction. (a) B actual multiplication, the truth of the theorem has bee verified for the cases $n=1, 2, 3, 4$.

(b) We shall prove that, if we assume the theore true for any integral value $n=m$, it must also be true f the next integral value $n=m+1$.

i.e. we assume $(a+b)^m = a^m + {_mC_1}\, a^{m-1}b + \dots$
$+ {_mC_r} a^{m-r} b^r + \dots\dots + b^m$.

ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಧನೆ

$(a+b)^n$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು n ಸಮಾನ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. ಅಂದರೆ,

$$(a+b)^n=(a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ \ldots.(a+b)$$

ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೂ ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದ a ಅಥವಾ b ಯನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಆರಿಸಿದ n ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದಲೂ a ಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಈ n aಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ a^n ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧವಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದುದರಿಂದ ಈ ಪದದ ಗುಣಕವು 1 ಆಗಿದೆ.

$a^{n-1}\,b$ ಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು b ಯನ್ನು ಒಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಆರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಉಳಿದ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದ $n-1$ a ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ b ಯನ್ನು n ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರಿಂದ ${}_nC_1$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ${}_nC_1\, a^{n-1}\, b$ ಪದವು ದೊರೆಯುವುದು.

$a^{n-2}\,b$ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು bಯನ್ನು ಯಾವುದಾದರೆರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಮತ್ತು a ಯನ್ನು ಉಳಿದ $(n-2)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಆರಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ${}_nC_2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದುದರಿಂದ ${}_nC_2\ \ a^{n-2}\, b^2$ ಎಂಬ ಪದವು ದೊರೆಯುವುದು.

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ 0 ಯಿಂದ n ನವರೆಗೆ (ಎರಡೂ ಸೇರಿದಂತೆ) r ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ನಮಗೆ ${}_nC_r\ \ a^{n-r}\, b^r$ ಎಂಬ ಪದವು ದೊರೆಯುವುದೆಂದು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಂಥ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತರಣೆ.

ಎರಡನೆಯ ಸಾಧನೆ. ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ

(a) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಸರಿಯೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

(b) $n=m$ ಎನ್ನುವ n ನ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರೆ ಪ್ರಮೇಯವು ಬೆಲೆ $n=m+1$ ಗೂ ಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ

$$(a+b)^m = a^m + {}_mC_1\, a^{m-1}\, b + \ldots. + {}_mC_r\, a^{m-r}b^r + \ldots$$
$+\ b^m$ ಎಂದು ನಾವು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

Now multiply both sides by $(a+b)$, and on the right side, combine like terms which have the same power of a or b We get

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+({}_mC_0+{}_mC_1)a^m b + \ldots\ldots + ({}_mC_r+{}_mC_{r-1})\, a^{m+1-r}b^r+ \ldots\ldots + b^{m+1}$$

But ${}_mC_r+{}_mC_{r-1}={}_{m+1}C_r$. (See Para 6.6).

$$\therefore (a+b)^{m+1}=a^{m+1}+{}_{m+1}C_1 a^m b+ \ldots\ldots + {}_{m+1}C_r\; a^{m+1-r}b^r+ \ldots\ldots +b^{m+1}.$$

But this result is the same as given by the theorem with $n=m+1$.

Hence if the theorem is true for $n=m$, it must also be true for $n=m+1$.

(c) But we have shown the theorem to be true for $n=1, 2, 3, 4$. Therefore it must be true for $4+1=5$. $5+1=6$, ... and so on for all positive integral values of n.

The student should note the following properties of the Binomial expansion 8.1 :—

1 The number of terms is $n+1$.

2 The rth term is ${}_nC_{r-1}\, a^{n-r+1}\, b^{r-1}$.

3 Since ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$, the coefficients of terms equidistant from either end of the expansion are the same. Hence it is sufficient to calculate the coefficients from the first to the middle term (or terms). The coefficients then repeat themselves in the reverse order.

Examples :

1 *Expand $(x+2y)^4$ by the binomial theorem.*

$$(x+2y)^4=x^4+{}_4C_1x^3(2y)+{}_4C_2x^2(2y)^2+{}_4C_3\, x(2y)^3+(2y)^4$$

$$=x^4+4\,.\,x^3\,.\,2y+\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\,x^2\,.\,4y^2+4x\,.\,8y^3+16y^4$$

$$=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$$

ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ $(a + b)$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಬಲ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಘಾತವಿರುವ a ಅಥವಾ b ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಬೇಕು.

$$(a + b)^{m+1} = a^{m+1} + ({}_mC_0 + {}_mC_1)\, a^m b + \ldots\ldots$$
$$+ ({}_mC_r + {}_mC_{r-1})\, a^{m+1-r} b^r + \ldots + b^{m+1}$$

ಆದರೆ $\quad {}_mC_r + {}_mC_{r-1} = {}_{m+1}C_r \qquad (6\cdot5)$

$$\therefore \quad (a + b)^{m+1} = a^{m+1} + {}_{m+1}C a^m b + \ldots +$$
$${}_{m+1}C_r a^{m+1-1} \quad b^r + \ldots + b^{m+1}$$

$n = m + 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವು ನೀಡುವ ಬೆಲೆ ಇದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $n = m$ ಆದಾಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯವೆಂದಾದರೆ, $n = m + 1$ ಆದಾಗಲೂ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು. (c) ಆದರೆ $n = 1, 2, 3, 4$ ಆದಾಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯವೆಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು $4 + 1 = 5$ $5 + 1 = 6, \ldots\ldots$ ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ n ನ ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಗಣಿತಾನುಮಾನಕ್ರಮದ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ದ್ವಿಪದಪ್ರಮೇಯದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ (8·1) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

1 ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n + 1$

2 r ನೆಯ ಪದ ${}_nC_{r=1}\, a^{n-r+1}\, b^{r-1}$

3 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ಆದುದರಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಎರಡೂ ಕೊನೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಒಂದನೆಯ ಪದದಿಂದ ನಡುವಿನ ಪದದ (ಪದಗಳ) ವರೆಗಿನ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಗುಣಕಗಳು ಓಮ್ಮೊಗವಾಗಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು—

1 $(x + 2y)^4$ನ್ನು ದ್ವಿಪದಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಗೊಳಿಸಿ.

$$(x + 2y)^4 = x^4 + {}_4C_1\, x^3\, (2y) + {}_4C_3\, x^2\, (2y)^2 + {}_4C_3\, x(2y)^3 + (2y)^4$$
$$= x^4 + 4x^3\, 2y + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\, x^2 \quad 4y^2 + 4\cdot8 \quad xy^3 + 16y^4$$
$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32\, xy^3 + 16y^4$$

2 *Find the fifth term in the expansion of*

$$\left(\frac{2}{a} - \frac{a}{3}\right)^{12}$$

The rth term in the general expansion s

$${}_nC_{r-1}\ a^{n-r+1}\ b^{r-1}$$

Here $r=5$, $n=12$, the first term is

$$\frac{2}{a}, \text{ and } b = -\frac{a}{3}.$$

Hence the required term is ${}_{12}C_4 \left(\frac{2}{a}\right)^8 \left(-\frac{a}{3}\right)^4$

$$= \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4.} \ .\ 2^8\ .a^{-8}\ .3^{-4} = \frac{14080}{9} a^{-4}$$

3. Show that ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\ \ldots\ +{}_nC_n=2^n$. In the binomial expansion 8.1. put $a=b=1$. We obtain

$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\ \ldots\ +{}_nC_n$
or ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\ \ldots\ +{}_nC_n=2^n$.

4. Find the value of $(.99)^5$ correct to 3 places of decimals. $(.99)=(1-0.01)^5$

$$=1+{}_5C_1\ (0.01)+{}_5C_2\ (-0.01)^2$$
$$+\ {}_5C_3\ (-0.01)^3+\ \ldots$$

$$=1-.05+\frac{5.4}{1.2}\times .0001-\frac{5.4.3}{1.2.3}\times .000001+\ \ldots$$

$$=1-.05+.001-00001+\ \ldots$$

$=.95099$ or $.951$ correct to 4 decimal places.

2 $\left(\frac{2}{a} - \frac{a}{3}\right)^{12}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಐದನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ rನೆಯ ಪದವು ${}_nC_{r-1}\ a^{n-r+1}\ b^{r-1}$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $r = 5$, $n = 12$, ಒಂದನೆಯ ಪದ $\frac{2}{a}$ ಮತ್ತು $b = -\frac{a}{3}$

$$\therefore \text{ ಬೇಕಾದ ಪದ } = {}_{12}C_4 \left(\frac{2}{a}\right)^8 \left(-\frac{a}{3}\right)^4$$

$$= \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \cdot 2^8 \cdot a^{-8} \cdot 3^{-4} = \frac{14080}{9}\, a^{-4}$$

3 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
8·1 ರಲ್ಲಿರುವ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ $a = b = 1$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ.

$(1 + 1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

ಅಥವಾ, ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n$

4 $(.99)^5$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(.99)^5 = (1-0.01)^5$$
$$= 1 + {}_5C_1(-0\cdot01) + {}_5C_2(-0.01)^2$$
$$+ {}_5C_3(-0.01)^3 + \cdots\cdots$$
$$= 1-0.05 + \frac{5\cdot4}{1.2} \times \cdot0001$$
$$- \frac{5.43}{1.2.3} \times \cdot000001 + \cdots\cdots$$
$$= 1-0\cdot05 + 0\cdot001 - 0\cdot00001 + \cdots\cdots$$

$= 0\cdot95099$ ಅಥವಾ 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ 0.951.

Exercises 8.1

Expand by the Binomal Theorem :—

1 $(1+x)^7$; 2 $x-2\ ^{5}$; 3 $(2x+y)^6$;

4 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$; 5 $(a^{-1}+b^{-2})^6$; 6 $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^5$;

7 $(ax-\mathrm{by})^4$; 8 $(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}})^5$; 9 $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^4$;

10 $(ax^{\frac{1}{3}}-\mathrm{by}^{\frac{1}{2}})^6$.

Write and simplify the indicated terms in the expa sions of the following :—

11 Sixth term of $(a-2b)^{10}$.

12 ninth term of $4\left(4+\frac{x}{2}\right)^{13}$.

13 Eleventh term of $(2x-3)^{16}$.

14 M ddle term of $(x^2-\frac{1}{2})^{10}$.

15 Term involving x^2 of $(3x-2)^{15}$.

16 Term involving x^7 of $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{11}$.

17 Middle term of $\left(3+\frac{2}{x}\right)^{10}$

18 Term involving x^5 of $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$.

19 Term independent of x in $(x2-2)^6$.

20 If n is even prove that

$${}_nC_0+{}_nC_2+\ldots\ldots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+\ldots\ldots+{}_nC_{n-1}.$$

21 Expand $(1+.01)^4$ by the binomial theorem a hence find the value of $(1.01)^4$ correct to 4 decimal place

22 As in the previous example, find the value $(0.98)^5$ correct to 3 decimal places.

23 Compute $(1.03)^8$ four significant figures.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 8.1

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಮಾಡಿ.

1 $(1+x)^7$; 2 $(x-2)^5$; 3 $(2x+y)^6$

4 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$; 5 $(a^{-1}+b^{-2})^6$; 6 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^5$;

7 $(ax-by)^4$; 8 $(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})^6$; 9 $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^4$

10 $(ax^{\frac{1}{2}}-by^{\frac{1}{4}})^6$

ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

11 $(a-2b)^{10}$ ಇದರಲ್ಲಿ 6 ನೆಯ ಪದ; 12 $\left(4+\frac{x}{2}\right)^{13}$ ಇದರಲ್ಲಿ 9 ನೆಯ ಪದ; 13 $(2x-3)^{16}$ ಇದರಲ್ಲಿ 11 ನೆಯ ಪದ; 14 $(x^2-\frac{1}{2})^{10}$ ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದ; 15 $(3x-2)^{15}$ ಇದರಲ್ಲಿ x^9 ಇರುವ ಪದ; 16 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{11}$ ಇದರಲ್ಲಿ x^7 ಇರುವ ಪದ; 17 $\left(3+\frac{2}{x}\right)^{10}$ ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದ;

18 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$ ಇದರಲ್ಲಿ x^5 ಇರುವ ಪದ; 19 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ ಇದರಲ್ಲಿ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪದ:

20 n ಎಂಬುದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ

$_nC_0 + {_nC_2} + \cdots + {_nC_n} = {_nC_1} + {_nC_3} + \cdots\cdots + {_nC_{n-1}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ;

21 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $(1+\cdot 01)^4$ ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಣೆಮಾಡಿ; ಮತ್ತು ತನ್ಮೂಲಕ $(1\cdot 01)^4$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22 ಹಿಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸದಂತೆ $(0\cdot 98)^5$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ;

23 $(1\cdot 03)^8$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

CHAPTER 9

PARTIAL FRACTIONS

9.1 Introduction

An expression of the form $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n$ where the a's are constants and $a_n\neq 0$, is called a *polynomi in x of degree n.* In this chapter we are concerned wi the quotient of two polynomials.

For example consider the expression $\frac{2x+5}{x^2+x-2}$. T numerator is a polynomial of degree 1 and the denominator polynomial of degree 2. We can factorise the denominat and write the expression as $\frac{2x+5}{(x-1)\,(x+2)}$. The proble is to express the quotient as the sum of *partial fractio* where each partial fraction contains a single factor in t denominator and a constant in the numerator. In this ca we have to find constants A, B such that

$$\frac{2x+5}{(x-1)\,(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

9.2 The Method

To resolve a given expression into partial fractions proceed by the following steps.

I If the polynomial in the numerator is of degr greater than or equal to that of the denominator, th divide the numerator by the denominator. We obtain polynomial and a fraction whose numerator is of degr less than that of the denominator. For example

$$\frac{x^2+3x+3}{x^2+x-2} \equiv 1+\frac{2x+5}{x^2+x-2}$$

This step is not necessary if the degree of numerator less than that of the denominator.

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

9·1 ಪೀಠಿಕೆ $a_n \neq 0$ ಮತ್ತು aಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ಎನ್ನುವ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಥವಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xನಲ್ಲಿ nಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\dfrac{2x+5}{x^2+x-2}$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶವು 1ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿಯೂ ಛೇದವು 2ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿಯೂ ಆಗಿವೆ. ನಾವು ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\dfrac{2x+5}{(x-1)\ (x+2)}$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು. ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು, ಛೇದದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವೂ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೂ ಇರುವಂತಹ ಎರಡು ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ, ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಹೇಗೆನ್ನುವುದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\dfrac{2x+5}{(x-1)\ (x+2)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$ ಆಗಿರುವಂತೆ A, B ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

9·2 ಕ್ರಮ ಒಂದು ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ.

I ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಅಥವಾ ಅಧಿಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ನಮಗೆ ಆಗ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯೂ, ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೂ ದೊರೆಯುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x-2} \equiv 1 + \dfrac{2x+5}{x^2+x-2}$

ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ ಈ ಹಂತವು ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ.

II Factorise the denominator. If $(x-a)$ is a simple factor occurring only once, then the corresponding partial fraction is of the form $\dfrac{A}{x-a}$.

For example $\dfrac{2x+5}{(x-1)(x+2)}$ can be expressed as the sum $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$.

III If $(x-a)$ is a multiple factor occurring r times then corresponding to $(x-a)^r$ we must assume r partial fractions $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\dfrac{A_r}{(x-a)^r}$.

For example $\dfrac{2x+5}{(x-1)^2(x+2)}$ can be expressed as the sum

$$\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+2}$$

IV If the denominator has a quadratic expression ax^2+bx+c which cannot be factorised, the corresponding partial fraction is of the form $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ where A, B are constants to be determined.

V To find the constants in the partial fractions multiply the assumed identity by all the factors of the denominator of the given quotient. Then give particular values to x and solve the resulting equations in the constants.

For example : $\dfrac{2x+5}{(x-1)(x+2)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$

Multiplying both sides by $(x-1)(x+2)$ we get

$$2x+5 \equiv A(x+2)+B(x-1)$$

II ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬೇಕು. $(x-a)$ ಎನ್ನುವ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನ ಒಂದೇ ಸಲ ಬರುವುದಾದರೆ ಆಗ ಅದಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{A}{x-a}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{2x+5}{(x-1)\ (x+2)}$ ಇದನ್ನು $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

III $(x-a)$ ಎನ್ನುವುದು r ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಆಗ $(x-a)^r$ ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ r ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{(x-a)^r}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{2x+5}{(x-1)^2(x+2)}$ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. $\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+2}$

IV ಛೇದದಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲಾಗದ ಒಂದು ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಉತ್ಪನ್ನ ವಿದ ರೆ ಆದಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದು ; ಇಲ್ಲಿ A, B ಗಳು ಗೊತ್ತುಮಾಡಬೇಕಾದ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು.

V ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಛೇದದ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಅನಂತರ x ಗೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ದೊರೆಯುವ, ಸಿ ರಾಂಕಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು $(x-1)\ (x+2)$ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ,

$2x+5\equiv A(x+2)+B(x-1)$ಎಂದು ದೊರೆಯುವುದು.

put $x=1$. $2+5=A\ (1+2)$

$$\therefore\ A=\frac{7}{3}$$

put $x=-2$, $-4+5=B\ (-2-1)$

$$\therefore\ B=-\tfrac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{2x+5}{(x-1)\ (x+2)} \equiv \frac{7}{3(x-1)} - \frac{1}{3\ (x+2)}$$

We may use other values for x and obtain the same result.

Examples : 1 *Resolve into partial fractions*

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)\ (x-2)^2}$$

The degree of the numerator is less than that of the denominator.

Hence step I is not necessary.

We assume—

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

Multiplying throughout by $(x+1)(x-2)^2$,

$$x^2-x+1 \equiv A(x-2)^2+B_1(x+1)(x-2)+B_2(x+1)$$

To find A, B_1, B_2 we give any 3 convenient values to x

Put $x=-1$, $3=9A$ $\therefore A=\tfrac{1}{3}$

Put $x=2$, $3=3B_2$ $\therefore B_2=1$

Put $x=0$, $1=4A-2B_1+B_2=\tfrac{4}{3}-2B_1+1$

$\therefore 2B_1=\tfrac{4}{3}$ or $B_1=\tfrac{2}{3}$

Hence $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2} \equiv \dfrac{\frac{1}{3}}{x+1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

2 Resolve into partial fractions—

$$\frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)}$$

$x=1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ, $2+5=A(1+2)$

$$\therefore A=\tfrac{7}{3}$$

$x=-2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $-4+5=B(-2-1)$

$$\therefore B=-\tfrac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{2x+5}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{7}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+2)}$$

xಗೆ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಕೊಡಬಹುದು, ಅದೇ ಉತ್ತರ ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ—

$\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2}$ ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ. ಒಂದನೆಯ ಹಂತವು ಅವಶ್ಯವಿಲ್ಲ.

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $(x+1)\ (x-2)^2$ ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ

$$x^2-x+1\equiv A(x-2)^2+B_1(x+1)(x-2)+B_2(x+1)$$

A_1, B_1 ಮತ್ತು B_2 ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು xಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x=-1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $3=9A \quad \therefore A=\tfrac{1}{3}$

$x=2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $3=3B_2 \quad \therefore B_2=1$

$x=0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $1=4A-2B_1+B_2=\tfrac{4}{3}-2B_1+1$

$\therefore 2B_1=\tfrac{4}{3}$ ಅಥವಾ $B_1=\tfrac{2}{3}$

ಆದುದರಿಂದ $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2}\equiv\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{2}{3}}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

2 ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ...

$$\frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)}$$

The denominator has a quadratic factor $2x^2+3$ which cannot be factorised. Hence we assume

$$\frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{2x^2+3}+\frac{C}{2x+1}$$

$$\therefore\ 3x-2 \equiv (Ax+B)(2x+1)+C(2x^2+3)$$

Put $x=-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}-2=C(\frac{1}{2}+3)$

$-\frac{7}{2}=\frac{7}{2}C, \quad \therefore C=-1$

put $x=0$, $-2=B+3C=B-3 \quad \therefore B=1$

put $x=1$, $1=(A+B)3+5C=3A+3-5$

$\therefore A=1$

$$\therefore \frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)}=\frac{x+1}{2x^2+3}-\frac{1}{2x+1}$$

Exercises 9.1

Resolve into partial fractions :—

(1) $\dfrac{x+10}{(x+3)(x-4)}$ (2) $\dfrac{3x-20}{(x-2)\ (x+5)}$

(3) $\dfrac{x-8}{(x+2)(x-3)}$ (4) $\dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$

(5) $\dfrac{3x-8}{2x^2+x-6}$ (6) $\dfrac{x+4}{3x^2-x-2}$

(7) $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$ (8) $\dfrac{6x^2-11x+13}{(x-2)^2(x+3)}$

(9) $\dfrac{3x+4}{(x+3)^3}$ (10) $\dfrac{x^2-2x+5}{(x^2+1)(x-2)}$

(11) $\dfrac{x-4}{(x^2+3)\ (2x-1)}$ (12) $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

(13) $\dfrac{x^2-2}{x^2-x-12}$ (14) $\dfrac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10}$

(15) $\dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-6}$ (16) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$

ಛೇದದಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲಾಗದ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನ $2x^2+3$ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಾವೀಗ

$$\frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{2x^2+3} + \frac{C}{2x+1},$$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore \quad 3x-2 \equiv (Ax+B)(2x+1)+C(2x^2+3)$

$x=-\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $\quad -\frac{3}{2}-2=C\left(\frac{1}{2}+3\right)$

$-\frac{7}{2}=\frac{7}{2}C, \quad \therefore \quad C=1$

$x=0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $\quad -2=B+3C=B-3 \quad \therefore \quad B=1$

$x=1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $\quad 1=(A+B)\,3+5C=3A+3-5$

$\therefore \quad A=1$

$$\therefore \quad \frac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)} \equiv \frac{x+1}{2x^2+3} - \frac{1}{2x+1}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 9.1 ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ—

(1) $\frac{x+10}{(x+3)(x-4)}$ (2) $\frac{3x-20}{(x-2)(x+5)}$

(3) $\frac{x-8}{(x+2)(x-3)}$ (4) $\frac{3x+5}{x^2+2x-3}$

(5) $\frac{3x-8}{2x^2+x-6}$ (6) $\frac{x+4}{3x^2-x-2}$

(7) $\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$ (8) $\frac{6x^2-11x+13}{(x-2)^2(x+3)}$

(9) $\frac{3x+4}{(x+3)^3}$ (10) $\frac{x^2-2x+5}{(x^2+1)(x-2)}$

(11) $\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)}$ (12) $\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

(13) $\frac{x^2-2}{x^2-x-12}$ (14) $\frac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10}$

(15) $\frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-6}$ (16) $\frac{x^3}{x^2-1}$

CHAPTER 10

DETERMINANTS AND LINEAR EQUATIONS

10.1 Determinants of the Second Order—A determinant of the second order is written symbolically as

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Here a, b, c, d are four numbers. They are called the *elements* of the determinant and they are arranged in the form of a square between two vertical lines. The value of the determinant is the number $ad—bc$, that is, the product of the elements in the upper left and lower right corners minus the product of the elements in the lower left and upper right corners.

$$\text{Thus} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \ldots.(10.1)$$

The determinant of the second order has 2 *rows* and 2 *columns.* Reading horizontally we have the first row consisting of the elements a, b and the second row consisting of the elements c, d. Reading vertically, we have the first column consisting of the elements a, c and the second column consisting of the elements b, d.

Examples :—

I $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 5 \times 3 = 8 - 15 = -7$

II $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\,(-3) - (-1)\,(-4) = -6 - 4 = -10$

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

10.1 ಎರಡನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು. ಎರಡನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಗಳು ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ನೀಟ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಚೌಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ $ad-bc$ ಎನ್ನುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ; ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಎಡ ಮೂಲೆಯ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಬಲ ಮೂಲೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಎಡ ಮೂಲೆಯ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಬಲ ಮೂಲೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟು. ಹೀಗೆ,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \qquad \text{.... (10·1)}$$

ಎರಡನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳೂ ಎರಡು ನೀಟಸಾಲುಗಳೂ ಇವೆ. ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಓದುವಾಗ ಒಂದನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ a, b ಮೂಲಾಂಶಗಳೂ, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ c, d ಮೂಲಾಂಶಗಳೂ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ನೀಟವಾಗಿ ಓದುವಾಗ ಒಂದನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ a, c ಮೂಲಾಂಶಗಳೂ, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ b, d ಮೂಲಾಂಶಗಳೂ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡಗಳೆಂದೂ, ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ನೀಟಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

I $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4-5\times3=8-15=-7$$

II $$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\,(-3)-(-1)\,(-4) = -6-4 = -10$$

Exercises 10.1

Evaluate the determinants in exercises 1—8.

1 $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **2** $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ **4** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **6** $\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix}$ **8** $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

9 Find x so that—

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ x & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

10 Solve for x, $\begin{vmatrix} 3x & 4 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 4x$

11 Prove the identity $\begin{vmatrix} x-4 & 7 \\ x-4 & 9 \end{vmatrix} = 2(x-4)$

10.2 Determinants of the Third Order—A determinant of the third order consists of 9 numbers arranged in the form of a square with 3 rows and 3 columns between two vertical lines, as follows :—

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots.(10.2)$$

Minors. If we remove from D the row and the column containing a particular element, we are left with a determinant of the second order which is called the *minor* of that element. We shall denote the minor of

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 10.1

1 ರಿಂದ 8 ರ ವರೆಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1 $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **2** $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ **4** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **6** $\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix}$ **8** $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

9 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ x & 6 \end{vmatrix} = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

10 x ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ : $\begin{vmatrix} 3x & 4 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 4x$

11 ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.—

$$\begin{vmatrix} x-4 & 7 \\ x-4 & 9 \end{vmatrix} = 2(x-4)$$

10.2 ಮೂರನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು. ಮೂರನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ 9 ಮೂಲಾಂಶಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಎರಡು ನೀಟಗೆರೆಗಳ ನಡುವೆ 3 ಅಡ್ಡ 3 ನೀಟಗಳಿರುವಂತೆ ಆಳವಡಿಸಲಾಗುವುದು.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad ...(10.2)$$

ಲಘುನಿರ್ಧಾರಕಗಳು. Dಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಶವಿರುವ ಒಂದು ಅಡ್ಡವನ್ನೂ ನೀಟವನ್ನೂ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಉಳಿಯುವ ಎರಡನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಆ ಮೂಲಾಂಶದ ಲಘುನಿರ್ಧಾರಕ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ ಲಘುವೆಂದು

any element by the corresponding capital letter. The the minor of the first element a_1 is $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Similarly the minors of the elements b_1 and c_1 of the firs row are respectively

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ and } C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

The *value* of the determinant D is then given by th following expression

$$D = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 \qquad .. \quad 10.3$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad .. \quad (10.4$$

$$\equiv a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 \qquad .. \quad (10.5$$

Examples :

I $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-4) - 3(2-6) + 4(4-3)$$

$$= -6 + 12 + 4 = 10$$

II $$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(18) - 2(-22) - 2(-3)$$

$$= -54 + 44 + 6 = -4$$

ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮೂಲಾಂಶದ ಲಘುವನ್ನು ಸಹಗಾಮಿ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. a_1 ಎನ್ನುವ ಮೊದಲಿನ ಮೂಲಾಂಶದ ಲಘುವು

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಆಗುವದು

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದನೆಯ ಅಡ್ಡದ b_1 ಮತ್ತು c_1 ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಲಘುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಮತ್ತು $$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ಆಗ D ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಹೀಗಿರುವುದು :

$$D = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 \qquad \text{.... (10,3)}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{.... (10.4)}$$

$$\equiv a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

....(10.5)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1 - 4) - 3(2 - 6) + 4(4 - 3)$$

$$= -6 + 12 + 4 = 10$$

II $$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(18) - 2(-22) - 2(-3)$$

$$= -54 + 44 + 6 = -4$$

In equation (10.3) we have expressed D in terms of the elements of the first row and corresponding minors. We can equally well expand D in terms of the elements of any other row or any column. For example, expanding in terms of the first column we have

$$D=a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3 \qquad ..(10.6)$$

and in terms of the second row

$$D=-a_2A_2+b_2B_2-c_2C_2 \qquad ..(10.7)$$

The student can easily verify these formulae by evaluating the minors and reducing each expression to the form (10.5). He will also notice that in each expression some terms are prefixed by the + sign and some terms by the — sign. The rule for determining the sign is simple. Take the element of D which appears in any term and add the "row number" and "column number" of that element. If the sum so obtained is an even number, then the corresponding term must be prefixed by a + sign ; if the sum is an odd number, the term must be prefixed with a — sign. For example take the element c_2 which appears in row number 2 and column number 3. Since $2+3=5$, an odd number. the term $-c_2C_2$ will appear in the expansion of D as in (10.7).

Exercises 10.2.

1 Expand the determinant D of the third order (10.2) in terms of (*a*) the third row (*b*) the second column and (*c*) the third column.

Evaluate the determinants in exercises 2—5.

2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 3 $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 5 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 8 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(10.3) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು D ಯನ್ನು ಒಂದನೆಯ ಅಡ್ಡದ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಹಗಾಮಿ ಲಘುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡದ ಅಥವಾ ನೀಟದ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಮೂಲಕವೂ D ಯನ್ನು ಸ ಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ,

$$D = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 \qquad \dots . (10.6)$$

ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡದ ಮೂಲಕ,

$$D = - a_2 A_2 + b_2 B_2 - c_2 C_2 \qquad \dots . (10.7)$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಲಘುಗಳನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ Dಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪುನರ್ವಿಂಗಡಿಸಿ ಅದು (10.5)ನೆಯ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಹಿಂದೆ + ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಹಿಂದೆ — ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಸೂತ್ರ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿರುವ Dಯ ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಆ ಮೂಲಾಂಶದ "ಅಡ್ಡದ ಸಂಖ್ಯೆ"ಯನ್ನೂ "ನೀಟದ ಸಂಖೆ" ಯನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ. ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ ಆ ಪದದ ಹಿಂದೆ + ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು ; ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ — ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2ನೆಯ ಅಡ್ಡದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು 3ನೆಯ ನೀಟದಲ್ಲಿ ಬರುವ c_2 ವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $2+3=5$ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ D ಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $- c_2 C_2$ ಎಂಬ ಪದವು ಬರುವುದು. (10.7 ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನೇ ಕಾಣಬಹುದು).

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 10.2.

ಮೂರನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ D ಯನ್ನು (10.2 ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ) (*a*) ಮೂರನೆಯ ನೀಟ ಮೂಲಕ ; (*b*) ಎರಡನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಕ ; ಮತ್ತು (*c*) ಮೂರನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

2 ರಿಂದ 5ರ ವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 8 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

6 Show that

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

7 Show that

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Note :—The value of the above determinant is twice the area of the triangle with vertices at the points (x_1, y_1), $x_2, y_2)$ and (x_3, y_3).

8 Using exercise 7 above, find the area of the triangle whose vertices are the points

(*a*) (1,2), (—2,—3) and (—1,1);

(*b*) (3,—2), (—1,2) and (—2,—4)

9 Find the value of x if

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

10.3 **Elementary Properties of Determinants**.—We shall state a few important properties of determinants in the form of theorems. Each can be easily proved by expanding the determinants that appear in it, and we shall leave the proof to the student.

Theorem I. The value of a determinant remains unchanged if corresponding rows and columns are interchanged.

For example,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

(7) ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

[ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.]

8 7ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(a) (1, 2), (—2, —3), (—1, 1) ;

(b) (3,—2), (—1, 2), (—2, —4)

9 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ xನ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

10·3 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೂಲ ಗುಣಗಳು. ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ನಾವಿಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬರೆದಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ I ಸಹಗಾಮಿ ಅಡ್ಡಗಳನ್ನೂ ನೀಟಗಳನ್ನೂ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Theorem II. If the elements of any row or column a all zero, then the value of the determinant is zero.

This is obvious if we expand the determinant in tern of the row column of zeros

Theorem III. If any two rows (or columns) of a dete minant are interchanged, the sign of the determinant is change

For example :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Theorem IV. If any two rows (or columns) of a dete minant are identical the value of the determinant is zero.

For example

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

This theorem may also be proved as follows : If D is t value of the determinant with two rows identical, then l interchanging these rows the value becomes $-D$ by the remIII, although the determinant does not change. Hen

$$\therefore D = -D,$$

$$2D = 0, \text{ or } D = 0$$

Theorem V. If each element of a row (or column) multiplied by the same number k. the value of the determina is multiplied by k.

ಪ್ರಮೇಯ II ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಡ್ಡದ ಅಥವಾ ನೀಟದ ಮೂಲಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವಾದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಶೂನ್ಯವು ಮೂಲಾಂಶಗಳಾಗಿರುವ ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟದ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ III. ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದಾದರೆರಡು ಅಡ್ಡಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ನೀಟಗಳನ್ನು) ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಪ್ರಮೇಯ IV ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದಾದರೆರಡು ಅಡ್ಡಗಳು (ಅಥವಾ ನೀಟಗಳು) ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಸರ ಸಮವಾಗಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ D ಎಂದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ $-D$ (ಪ್ರಮೇಯ III) ಆಗುವುದು. ಆದರೆ ಇದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$$\therefore D = -D,$$
$$2D = 0 \text{ ಅಥವಾ } D = 0$$

ಪ್ರಮೇಯ V ಒಂದು ಅಡ್ಡದ (ಅಥವಾ ನೀಟದ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು k ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು k ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಂತಾಗುವುದು.

For example

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Note :—Any common factor of the elements of a row (or column) may be taken outside the determinant. This usually helps in simplifying the calculations. Also if two rows (or columns) have their corresponding elements proportional, the value of the determinant is zero. This follows from theorem IV after removing the common factor.

Theorem VI. *If each element of a column (or row) is expressed as the sum of two elements, then the determinant can be expressed as the sum of two determinants; as follows :—*

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Proof :—Expanding the first determinant in terms of the elements of the first column we have

$$\text{L.H.S.} = (a_1+x_1)\, A_1 - (a_2+x_2)\, A_2 + (a_3+x_3)\, A_3$$

$$= (a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3) + (x_1A_1 - x_2A_2 + x_3A_3)$$

$$= \text{R.H.S.}$$

Theorem VII. If each element of any column (or row) of a determinant is multiplied by the same number k and added to the corresponding element of another column (or row), the value of the determinant remains unchanged.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ಅಡ್ಡದ (ಅಥವಾ ನೀಟದ) ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಹೊರಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. ಗಣನೆಗಳನ್ನು ಸರಳವಾಗಿಸಲು ಈ ಕ್ರಮ ಸಹಾಯಕವಾಗುವುದು. ಅಲ್ಲದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಗಳ (ಅಥವಾ ನೀಟಗಳ) ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು (ಪ್ರಮೇಯ IV).

ಪ್ರಮೇಯ VI ಒಂದು ನೀಟದ (ಅಥವಾ ಅಡ್ಡದ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನೂ ಎರಡು ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಸಾಧನೆ :

ಒಂದನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಒಂದನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ,

$$\text{ಎಡಬದಿ} = (a_1+x_1)\,A_1-(a_2+x_2)\,A_2+(a_3+x_3)\,A_3$$
$$= (a_1\,A_1-a_2\,A_2+a_3\,A_3)+(x_1\,A_1-x_2\,A_2+x_3\,A_3)$$
$$= \text{ಬಲಬದಿ}$$

ಪ್ರಮೇಯ VII. ಒಂದು ನೀಟದ (ಅಥವಾ ಅಡ್ಡದ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು k ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ನೀಟದ (ಅಥವಾ ಅಡ್ಡದ) ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

For example :

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ by Th. VI}$$

The first determinant is obtained by adding k times th third column to the first column of the determinant D of 10.2. To show that it is equal to D, we have

$$\begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ by Th. IV}$$

Hence the result.

The above theorems will be very useful in evaluati determinants. We shall illustrate methods of such eval ation with a few examples .

Examples :

I $$\begin{vmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 9 & 18 & 9 \\ 14 & 21 & 7 \end{vmatrix} = 10.9.7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ since the la}$$

determinant has the first and third rows identical. N that we first remove the factors 10, 9 and 7 respectiv from each row.

II $$\begin{vmatrix} 5 & 20 & 25 \\ 6 & 18 & 24 \\ 8 & 16 & -24 \end{vmatrix} = 5.6.8 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 240 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 240 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 240\ [8-2] = 1440$$

ಉದಾಹರಣೆ :

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (6ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ದಿಂದ)

ಇಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿಯ ನಿರ್ಧಾರಕವು (10.2) ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿರುವ D ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೂರನೆಯ ನೀಟದ k ಯಷ್ಟನ್ನು ಒಂದನೆಯ ನೀಟಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು D ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $$\begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ಪ್ರಮೇಯ IV ರಿಂದ.

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಅತ್ಯುಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನಾವು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

I $$\begin{vmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 9 & 18 & 9 \\ 14 & 21 & 7 \end{vmatrix} = 10.9.7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ಏಕೆಂದರೆ ಕೊನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ. ಮೊದಲು 10, 9, 7 ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಿಂದ ನಾವು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

II $$\begin{vmatrix} 5 & 20 & 25 \\ 6 & 18 & 24 \\ 8 & 16 & -24 \end{vmatrix} = 5.6.8 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 240 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 240 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 240\,[8-2] = 1440$$

In the first step we remove the factors 5, 6 and 8 from the rows. In the second step we simplify the determiant by subtracting the first row from the second and third rows. By theorem VII, the value of the determinant is unaltered. We finally expand the resulting determinant in terms of the first column.

III

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 12 & 85 & 109 \\ 11 & 79 & 103 \end{vmatrix}$$

Since we have only as the first element in the first row, we can reduce to zero the first elements of the second and third rows without altering the value of the determinant. To do this, we replace the second row by (second row)—12 × (first row) ; and replace the third row by (third row)—11 × (first row). By theorem VII, the value of the determinant is unaltered and we obtain

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Exercises 10.3

1 Explain why the two determinants in each case are equal and verify the fact

(*a*) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(*b*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

ಮೊದಲಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಗಳಿಂದ 5, 6, 8 ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಅಡ್ಡವನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಗಳಿಂದ ಕಳೆದು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ VII ರ ಪ್ರಕಾರ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ.

II.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 12 & 85 & 109 \\ 11 & 79 & 103 \end{vmatrix}$$

ಒಂದನೆಯ ಅಡ್ಡದ ಒಂದನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ 1 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಗಳ ಒಂದನೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೇ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು ನಾವು, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲನ್ನು

(2 ನೆಯ ಸಾಲು) — 12 × (1 ನೆಯ ಸಾಲು)

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ ; ಮೂರನೆಯ ಸಾಲನ್ನು

(3 ನೆಯ ಸಾಲು) — 11 × (1 ನೆಯ ಸಾಲು)

ಎಂಬುದಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ VII ರ ಪ್ರಕಾರ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 10·3

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ; ಇದನ್ನು ಗಣನೆಯಿಂದ ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

2 Without evaluating, state why each of the following determinants is zero. Verify by evaluating each.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -9 \end{vmatrix}$

3 Evaluate the following determinants by first taking out common factors from any row or column and then expanding—

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 & -9 \\ 16 & -24 & 8 \\ 22 & 11 & 33 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 14 & 16 & 27 \\ -21 & 8 & 18 \\ 7 & -24 & 9 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 12 & 15 & -18 \\ 16 & 20 & 12 \end{vmatrix}$

4 Use theorem VI to express the sum of the following two determinants as a single determinant. Verify the result by evaluating all three determinants.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

5 In each of the following determinants, reduce the first elements of the second and third rows to zero by adding suitable multiples of the first row to these rows. Hence evaluate the determinants.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -32 & -42 \\ 6 & -31 & -38 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -7 \\ -5 & 41 & 37 \\ 4 & -30 & -29 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 6 & 15 & 25 \\ 10 & 28 & 49 \end{vmatrix}$

2 ವಿಸ್ತರಿಸದೇ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯೂ ಶೂನ್ಯವೇಕೆಂದು ವಿವರಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿ ತಿಳಿದು ವಾದವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -9 \end{vmatrix}$

3 ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಡ್ಡದಿಂದ ಅಥವಾ ನೀಟದಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದು ಅನಂತರ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 & -9 \\ 16 & -24 & 8 \\ 22 & 11 & 33 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 14 & 16 & 27 \\ -21 & 8 & 18 \\ 7 & -24 & 9 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 12 & 15 & -18 \\ 16 & 20 & 12 \end{vmatrix}$

4 ಪ್ರಮೇಯ VIನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

5 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿಯೂ. ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಗಳ ಒಂದನೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದನೆಯ ಅಡ್ಡದ ಯುಕ್ತ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿ. ತನ್ಮೂಲಕ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -32 & -42 \\ 6 & -31 & 38 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -7 \\ -5 & 41 & 37 \\ 4 & -30 & -29 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 6 & 15 & 25 \\ 10 & 28 & 49 \end{vmatrix}$

6 Without expanding, find the root of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & x & 14 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

7 Determine the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

10.4 Solution of Linear Equations by Determinants.

Consider the system of linear equations in two unknowns x and y, namely,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

To solve them we first eliminate y by multiplying the first equation by b_2, the second by b_1, and subtracting one from the other. We get

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = (c_1b_2 - c_2b_1)$$

$$\therefore\ x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Similarly we can show that $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

6 ವಿಸ್ತರಿಸದೆ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & x & 14 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

7 ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

10.4 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೂಲಕ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ.

x ಮತ್ತು y ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಅಜ್ಞಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಎರಡು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಒಂದನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು b_2 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು b_1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಒಂದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕಳೆದು yಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, $(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$$\therefore x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

Thus the solution for each variable is expressed as the ratio of two determinants. The denominator in each case is the determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ which is called the *determinant of the coefficients.* To obtain the numerator in the value of any variable, we replace in D the column of coefficients of that variable by the constants c_1 and c_2. For example for the numerator of the solution for x, we replace the column containing a_1 and a_2 by c_1 and c_2. Note that a solution can be found only if $D \neq 0$.

Equations with three unknowns. Consider the equations

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Let $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ be the *determinant of the coefficients.*

Applying theorems V and VII of para 10.3 we can write

$$Dx = \underset{\text{Step I}}{\begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \underset{\text{Step II}}{\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \underset{\text{Step III}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

In step I, we multiply the first column by x which makes the value of the determinant $D\,x$; in step II we add to the first column y times the second column and z times

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚರದ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದವು $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗುಣಕ ನಿರ್ಧಾರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಚರದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಶವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು ಆ ಚರದ ಗುಣಕಗಳಿರುವ D ಯ ನೀಟವನ್ನು c_1 ಮತ್ತು c_2 ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, xನ ಬೆಲೆಯ ಅಂಶವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು a_1, a_2 ಗಳಿರುವ ನೀಟವನ್ನು c_1 ಮತ್ತು c_2 ಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ. $D \neq 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಮೂರು ಅಜ್ಞಾತಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

ಎಂಬ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂಬುದು ಗುಣಕ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರಲಿ.

$$Dx = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಒಂದನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ ಎರಡನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಮೂರನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ

ಒಂದನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ, ಒಂದನೆಯ ನೀಟವನ್ನು ನಾವು xನಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ Dx ಆಗುವುದು. ಎರಡನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ನೀಟಕ್ಕೆ ನಾವು ಎರಡನೆಯ ನೀಟದ y ಯಷ್ಟನ್ನೂ ಮೂರನೆಯದರ z ಷ್ಟನ್ನೂ

the third column, which does not change the value of the determinant by theorem VII ; in step III we use the given equations to replace the elements of the first column by d_1, d_2, d_3.

Hence we get

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Similarly we can show that

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \text{ and}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

The determinant in the numerator of the solution for any variable is obtained from the determinant D by replacing the column of coefficients of that variable by d_1, d_2 and d_3.

The above method of solution by means of determinants is known as Cramer's Rule. The rule can be applied only if $D\neq 0$.

Examples :

I $2x-5y=12$

$3x+y=1$

ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ (ಪ್ರಮೇಯ VII). ಮೂರನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದನೆಯ ನೀಟದ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು d_1, d_2, d_3 ಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$ ಎಂದು ದೊರೆಯುವುದು.

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ $$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಚರದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಶವನ್ನು D ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಆ ಚರದ ಗುಣಕಗಳಿರುವ ನೀಟವನ್ನು d_1, d_2, d_3 ಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $D \neq 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I $\quad 2x - 5y = 12$

$\quad 3x + y = 1$

$$\text{Solution : } x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12+5}{2+15} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-36}{2+15} = -2$$

The student should check that the solution $x=1$, $y=-2$ satisfies the given equations.

II Solve

$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+2z=3$$
$$3x+2y-z=1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7+8-5 = -4.$$ We have expanded in terms of the first row

Solution :

$$-4x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - (-1) + 9 = -4$$

$$\therefore x = 1$$

$$-4y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - 2(-8) + (-11) = 4$$

$$\therefore y = -1$$

$$-4z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 - (-11) + 2(-5) = -8$$

$$\therefore z = 2$$

The solution can easily be checked by substituting the values $x=1$, $y=-1$, $z=2$ in the given equations.

ಸಾಧನೆ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12+5}{2+15} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-36}{2+15} = -2$$

$x=1$, $y=-2$ ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಪ್ಪುವ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತಾಳೆನೋಡಬೇಕು.

II ಬಿಡಿಸಿ :

$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+2z=3$$
$$3x+2y-z=1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7+8-5 = -4,$$ (ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡದ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ್ದೇವೆ)

ಸಾಧನೆ :

$$-4x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot7-(-1)+9 = -4$$

$$\therefore \quad x=1$$

$$-4y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)-2(-8)+(-11) = 4$$

$$\therefore \quad y=-1$$

$$-4z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9-(-11)+2(-5) = -8$$

$$\therefore \quad z=2$$

ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $x=1$, $y=-1$, $z=2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಸರಿಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

Exercise **10.4**

Solve the following systems of equations by determinants.

1 $6x+5y=2$
$4x-3y=14$

2 $7x+11y=4$
$9x+8y=-1$

3 $5x+6y=3$
$3x-4y=-21$

4 $2x+3y+z=0$
$x-y+2z=3$
$-3x+2y-z=1$

5 $x+y+z=2$
$2x-3y-z=2$
$-x+2y+3z=-3$

6 $x-y-2z=4$
$-x+2y-z=1$
$2x-3y=1$

ಅಭ್ಯಾಸ 10·4

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೂಟಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1 $6x+5y=2$
$4x-3y=14$

2 $7x+11y=4$
$9x+8y=-1$

3 $5x+6y=3$
$3x-4y=-21$

4 $2x+3y+z=0$
$x-y+2z=3$
$-3x+2y-z=1$

5 $x+y+z=2$
$2x-3y-z=2$
$-x+2y+3z=-3$

6 $x-y-2z=4$
$-x+2y-z=1$
$2x-3y=1$

ELEMENTARY CALCULUS

CHAPTER 11

Functions and Limits

11.1 Introduction—Calculus is one of the most important branches of mathematics. It has important applications in Engineering and all the Sciences. In this chapter and the next we shall explain some of the fundamental ideas of the subject—*function, limit, continuity and differentiation.*

11.2 Real Variable—In mathematics we usually have two kinds of quantities—constants and variables. A constant is a fixed number. For example the sum of the three angles of a triangle is always two right angles—a constant quantity.

A variable is a quantity that can assume any one of a set of values. If these values are all real numbers, the quantity is called a *real variable.* We often use the symbol x to denote a real variable. The set of real numbers which x may assume is called the *range* of the variable.

Interval—If a, b are two given real numbers where $a<b$, then the set of all real numbers lying between a and b is called the *interval from a to b.* This set is usually written as (a, b). If a variable x takes all real values in the interval (a, b), it is called a *continuous real variable* in that interval.

11.3 Function—Let x and y be two real variables. Suppose there is a rule connecting them so that for each value of x in its range of variation we can find by the rule one and only one corresponding value of y. In these circumstances we say that *y is a function of x.* We denote such a functional relationship by writing $y=f(x)$. We read this as "y equals f of x". x is called the independent variable and y the dependent variable.

ಸುಲಭಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ

ಅಧ್ಯಾಯ 11

ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ಪರಮಾವಧಿಗಳು

11.1 ಪೀಠಿಕೆ—ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಗಣಿತದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಅಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಬಹುವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ, ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿಯೂ ಮುಂದಿನದರಲ್ಲಿಯೂ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಕೆಲವು ಮೂಲಭಾವನೆಗಳಾದ ಉತ್ಪನ್ನ, ಪರಮಾವಧಿ, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

11.2 ವಾಸ್ತವ ಚರಸಂಖ್ಯೆ—ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಥಿರಗಳು ಮತ್ತು ಚರಗಳು ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಸದಾ ಎರಡು ಸಮ ಕೋನಗಳು. ಇದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ. ಒಂದು ನಿಯತ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಚರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಅಂತಹ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಚರಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವ ಚರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ x ಎನ್ನುವ ಸಂಕೇತದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. x ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಚರದ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅವಕಾಶ a, b ಗಳು $(a<b)$ ಎರಡು ದತ್ತ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ a, b ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು a ಯಿಂದ b ವರೆಗಿರುವ ಅವಕಾಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಗಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ (a, b) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. x ಎನ್ನುವ ಚರವು (a, b) ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುವುದಾದರೆ, x ಆ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಚರವಾಗಿರುವುದು.

11.3 ಉತ್ಪನ್ನ—x ಮತ್ತು y ಗಳು ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವ ಒಂದು ನಿಯಮವಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ x ತನ್ನ ಅವಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದಾಗಲೂ yಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವೆಂದೂ ತಿಳಿಯೋಣ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ yಯು xನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು $y=f(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು " yಯು xನ f " ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. xನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವೆಂದೂ yಯನ್ನು ಅಧೀನ ಚರವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

The rule connecting y as a function of x is usually represented by an equation between the two variables. For example the equation $y=2x+3$ defines y as a function of x. For any value of x we can find one and only one corresponding value of y. In particular for

$x=-2$, -1, 0, 1, 2 we have
$y=-1$, 1, 3, 5, 7.

We may also write $f(x)=2x+3$; $f(-2)=-1$, $f(-1)=1$, $f(0)=3$, $f(1)=5$, $f(2)=7$.

11.4 Graph of a Function: Take two axes OX, OY at right angles. If $y=f(x)$, we can represent each pair of corresponding values (x, y) by a point in the plane. We first measure a distance ON along OX equal to x. At N we draw NP perpendicular to OX and equal to y. The point P then represents the pair of corresponding values (x, y). If x is negative, we mark ON in the opposite direction to OX; if y is negative we draw NP in the opposite direction to O. All such points P representing pairs of corresponding values (x, y), where $y=f(x)$, form the *graph* of the function.



Fig. 11.1

In figure 11.1, we have marked the points $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$ and $(1, 5)$ corresponding to the function $y=2x+3$. If an indefinitely large number of such points are marked, it will be found that the graph of the function is a straight line as shown in the figure.

yಯನ್ನು xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಅವೆರಡನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣ ಅಗತ್ಯವೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $y = 2x + 3$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣ yಯನ್ನು xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು. xನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ yಯ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ವಿಶಿಷ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ,

$x = -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$ ಆಗಿದ್ದಾಗ

$y = -1, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7$ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು $f(x) = 2x + 3$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $f(-2) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 5$, $f(2) = 7$ ಆಗಿದೆ.

11.4 ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ—ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ox, oy ಎನ್ನುವ ಎರಡ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ. $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ (x, y) ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ತಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. oxನಮೇಲೆ ON $(= x)$ನ್ನು ಮೊದಲು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. NPಯನ್ನು oxಗೆ Nನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು $NP = y$ ಎಂದು ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಬಿಂದುವು (x, y) ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. x ಋಣಾತ್ಮಕವಾದರೆ ONನ್ನು oxನ ಮೇಲೆ ವಿರೋಧದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. y ಋಣಾತ್ಮಕವಾದರೆ NPಯನ್ನು oyಯ ವಿರೋಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ $y = f(x)$ ಆಗಿರುವಾಗ, (x, y) ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ P ನಂತಹ ಬಿಂದುಗಳು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.1

11.1 ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $y = 2x + 3$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನದ $(-2, -1)$; $(-1, 1)$, $(0, 3)$ ಮತ್ತು $(1, 5)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

Example : Draw the graph of the function $y=x^2$.

We substitute values of x in the equation and calculate the corresponding values of y. Some pairs of corresponding values are indicated in the following table :

$x=$	-3,	-2,	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	2,	3
$y=$	9,	4,	1,	$\frac{1}{4}$,	0,	$\frac{1}{4}$,	1,	4,	9

These points are marked in figure 11.2. If we mark an indefinitely large number of such points, we obtain

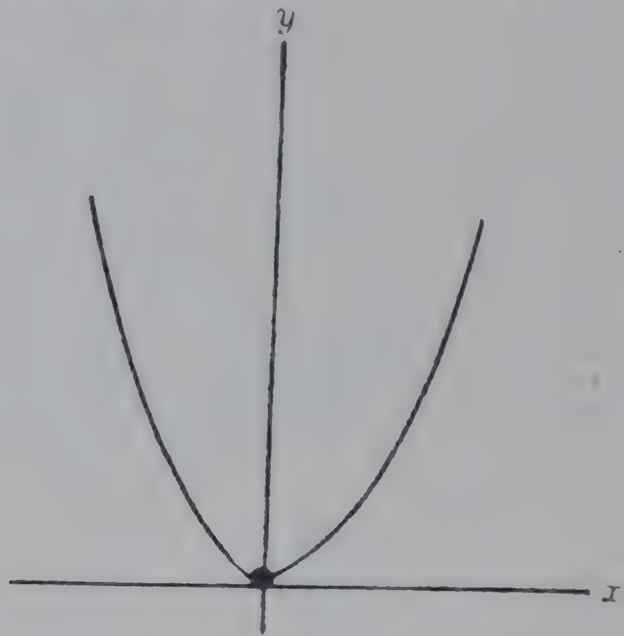


Fig 11.2

the graph as a curve shown in the figure. This curve is called a *Parabola*.

Exercise 11.1

Each of the following equations defines y as a function of x. Draw the graph of each function.

1 $y=2-3x$

2 $y=x-4$

3 $y=-x-2$

4 $y=2x^2$

5 $y=-x^2$

6 $y=x^2+1$

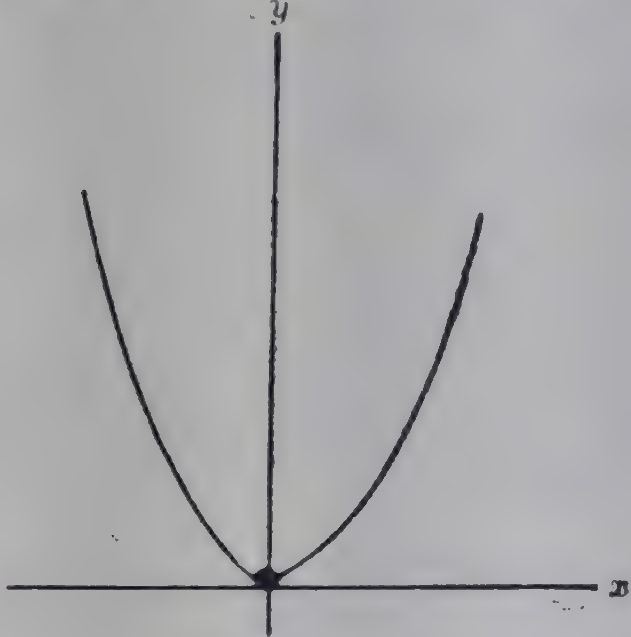
7 $y=-2x^2=1$

ಉದಾಹರಣೆ $y=x^2$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ xಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ y ಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

$$x = -3,\ -2,\ -1,\ -\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3$$
$$y = 9,\ 4,\ 1,\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ 1,\ 4,\ 9$$

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 11·2ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಅಸಂಖ್ಯಾತ



ಚಿತ್ರ 11.2

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಯ ನಕ್ಷೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ರೇಖೆಯ ಹೆಸರು ಪೆರಾಬೊಲ (ಪರವಲಯ)

ಅಭ್ಯಾಸ 11·1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವೂ yಯನ್ನು xನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನೂ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1 $y = 2 - 3x$;　　2 $y = x - 4$

3 $y = -x - 2$;　　4 $y = 2x^2$

5 $y = -x^2$;　　6 $y = x^2 + 1$;

7 $y = -2x^2 - 1$

11.5 Limit of a Function—So far we have been finding values of a function $y=f(x)$ by substituting values of x and calculating the corresponding values of y. It may happen that when we substitute a particular value of x the equation does not determine any value of y. Consider for example the function given by the equation $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. If we put $x=1$ we find $y=\dfrac{0}{0}$, which has no meaning. In other words the function has *no value* corresponding to $x=1$. Let us examine the values of y for values of x *very near* to 1. We set down such corresponding values in the following table :

$x=0.9$	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$y=1.9$	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1

We notice that *as x approaches closer and closer to the value 1, y approaches closer and closer to the value 2.* We describe this behaviour of the function by saying that "*y tends to the limit 2 as x tends to 1.*"

The notion of limit is of very great importance in mathematics.

The student must clearly understand that a limiting value is not necessarily an *actual* value of the function. It is a value which the function approaches closer and closer as the independent variable x approaches the corresponding value. We may state the general definition of a limit as follows :

Definition : A function $y=f(x)$ is said to tend to a limit l as x tends to a value a if we can make the difference $y-l$ as small as we please by taking x so that the difference $x-a$ is sufficiently small.

We write symbolically $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

11.5 ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಮಾವಧಿ—ಇದುವರೆಗೆ $y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು xಗೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ yಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಸಲ xಗೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಸಮೀಕರಣವು yಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ನೀಡದಿರಬಹುದು. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$x = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $y = \frac{0}{0}$ ಎಂದಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಬೆಲೆಗೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, $x = 1$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ. ಹಾಗಾದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು 1 ಕ್ಕೆ ಅತಿಸಮೀಪವಾದಾಗ yಯ ಬೆಲೆಗಳೆಷ್ಟೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಂತಹ ಪರಸ್ಪರ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

$$x = 0.9, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1$$
$$y = 1.9, 1.99, 1.999, 2.001, 2.01, 2.1$$

x ನ ಬೆಲೆಯು 1ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಯ ಬೆಲೆಯು 2 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು ಎಂದು ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. x ಒಂದನ್ನು ಸಮಿಾಪಿಸಿದಂತೆ y ಪರಮಾವಧಿ ಬೆಲೆ 2 ನ್ನು ಸಮಿಾಪಿಸುವುದು ಎಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಈ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಮಾವಧಿ ಎಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಲು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಮಾವಧಿ ಬೆಲೆಯು ಅದರ ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆಯೇ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. x ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಉತ್ಪನ್ನವು ಸಮಿಾಪಿಸುವ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಅದರ ಪರಮಾವಧಿ.

ಪರಮಾವಧಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $|x-a|$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಾಕಷ್ಟು ಅಲ್ಪವಾಗುವಂತೆ x ನ್ನು ಆರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $|y-l|$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಮಗಿಷ್ಟ ಬಂದಷ್ಟು ಅಲ್ಪವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $y = f(x)$, l ಎನ್ನುವ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Theorems on Limits—I *The limit of the sum of two functions is equal to the sum of their limits.*

lim $f_1(x)$, $f_2(x)$ are functions of x and $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$, and $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$, then it is obvious that the sum $f_1(x) + f_2(x)$ approaches closer and closer to the sum $l_1 + l_2$ as x approaches closer and closer to the value a.

$$\text{Hence } \lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$$

The theorem can easily be extended to the sum of a finite number of functions. We have : *The limit of the sum of a finite number of functions is equal to the sum of their limits.*

Example :

$$\lim_{x \to 2} [2x^3 + 3x + 5] = \lim_{x \to 2} (2x^3) + \lim_{x \to 2} (3x) + \lim_{x \to 2} (5)$$

$$= 2 . 2^3 + 3 . 2 + 5 = 16 + 6 + 5 = 27$$

II. *The limit of the product of two functions is equal to the product of their limits.*

The theorem states that if $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ and $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ then $\lim_{x \to a} [f_1(x) \times f_2(x)] = l_1 \times l_2$. The student will have no difficulty in accepting this result as obvious and extending it to the product of a finite number of functions.

ಪರಮಾವಧಿಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

I ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಪರಮಾವಧಿಯು ಅವುಗಳ ಪರಮಾವಧಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

$f_1(x)$ ಮತ್ತು $f_2(x)$ ಗಳು xನ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\underset{x\to a}{Lt}\ f_1(x)=l_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ x, a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $f_1(x)+f_2(x)$ ಮೊತ್ತವು l_1+l_2 ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ಸ ಷ್ಟವಾಗಿದೆ

$$\therefore \lim_{x\to a} [f_1(x)+f_2(x)]=l_1+l_2$$

ಪರಾ ಪ ಸಂಖೆ ಯಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸುಲಭ ವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ “ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಸಂಖೆ ಯಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಪರಮಾವಧಿಯು ಅವುಗಳ ಪರಮಾವಧಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ”.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$\lim_{x\to 2} (2x^3+3x+5)=\lim_{x\to 2}(2x^3)+\lim_{x\to 2}(3x)+\lim_{x\to 2}(5)$$

$$=2\cdot 2^3+3\cdot 2+5=16+6+6=27$$

II ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪರಮಾವಧಿಯು ಅವುಗಳ ಪರಮಾವಧಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1$ ಮತ್ತು $\lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$ ಎಂದಾದರೆ, $\lim_{x\to a} [f_1(x)\times f_2(x)]=l_1\ l_2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿಯೂ ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮಿತಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಿಸುವುದರಲ್ಲಿಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಏನೂ ಕಷ್ಟವಾಗಲಾರದು.

Example :-

If $f_1(x)=2x^3+3x+5$ and $f_2(x)=x^4$, then as in the above example, $\lim_{x\to 2} f_1(x)=27$ and $\lim_{x\to 2} f_2(x)=16$

Hence $\lim_{x\to 2} [f_1(x)\times f_2(x)]=27\times 16=432$

III *The limit of the quotient of two functions is equal to the quotient of their limits. provided the limit of the denominator is not zero.*

The theorem states that if $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$,

then $$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}\text{. provided } l_2\neq 0$$

Example :—

If $f_1(x)=2x^3+3x+5$ and $f_2(x)=x^4$, we have as shown above $\lim_{x\to 2} f_1(x)=27$, $\lim_{x\to 2} f_2(x)=16$

$$\text{Hence } \lim_{x\to 2}\left[\frac{2x^3+3x+5}{x^4}\right]=\frac{27}{16}$$

11.6 Continuity—For many functions the limiting value of the function as x tends to a is also the actual value of the function at that point. In other words we often have $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. In this case we say that the function

ಉದಾಹರಣೆ : $f_1(x)=2x^3+3x+5$ ಮತ್ತು $f_2(x)=x^4$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ,

$$\lim_{x\to 2} f_1(x)=27, \text{ ಮತ್ತು } \lim_{x\to 2} f_2(x)=16$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}[f_1(x)\times f_2(x)]=27\times 16=432$$

III ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಪರಮಾವಧಿಯು ಅವುಗಳ ಪರಮಾವಧಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧಕ್ಕೆ (ಛೇದದ ಪರಮಾವಧಿ 0 ಆಗಿರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ) ಸಮ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1$ $\lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2} \quad (l_2\neq 0 \text{ ರೆ ಮಾತ್ರ})$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $f_1(x)=2x^3+3x+5$ ಮತ್ತು
$f_2(x)=x^4$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ, $\lim_{x\to 2} f_1(x)=27$, $\lim_{x\to 2} f_2(x)=16$

ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{2x^3+3x+5}{x^4}=\frac{27}{16}$$

11.6 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ—ಅನೇಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ದೊರೆಯುವ ಪರಮಾವಧಿಯೂ x, a ಆದಾಗ ದೊರೆಯುವ ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆಯೂ ಸಮವಾಗಿವೆ, ಅಂದರೆ,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$f(x)$ is *continuous at the point* $x=a$. The graph of th function will be a continuous curve at that point and w will be able to trace it without lifting our pencil from th paper. On the other hand if a function is *discontinuou* at a point then we shall not be able to trace the grap continuously at that point.

Example : A function $f(x)$ is defined as follows :

$f(x)=1$ for all negative values of x, namely for $x<0$, an $f(x)=\frac{1}{2}$ for zero and positive values of x, i.e., for $x\geqslant$(The graph of the function is shown in figure 11.3

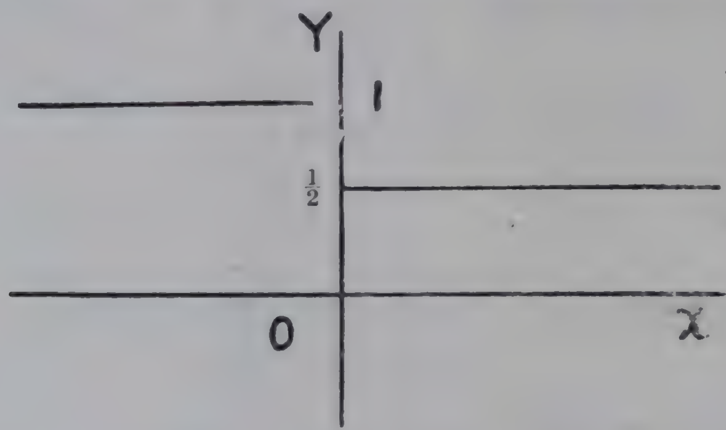


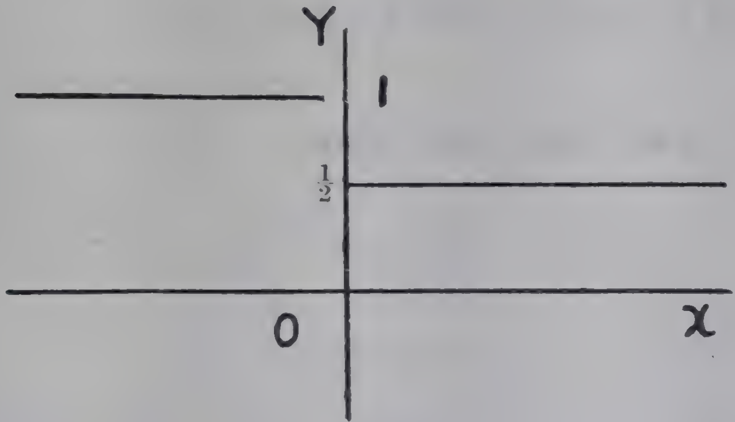
Fig. 11.3

Corresponding to negative values of x, the graph consist of a straight line parallel to the axis of x and at a distanc 1 *unit* from that axis. Corresponding to zero and positiv values of x the graph is also a straight line parallel to th x-axis but at a distance of $\frac{1}{2}$ *unit* from that axis. W easily see from the graph that the function is *discontinuou* at the point $x=0$. In fact if we trace the graph from left t right we have to suddenly *jump* half a unit downward as we pass through the point zero! We explain th discontinuity mathematically by showing that the functio has no limiting value at the point $x=0$. As x approache 0 through negative values the function approaches th

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $f\ (x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ಎನ್ನುವಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ (ತುಂಡಾಗದ) ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ; ಕಾಗದದಿಂದ ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತದೆ ಅದನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಹೀಗಲ್ಲದೆ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದರೆ ಅದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ತುಂಡಾಗದಂತೆ ಬಿಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ : $f\ (x)$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ :

x ನ ಎಲ್ಲ ಋಣಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $f\ (x)=1$, (ಅಂದರೆ $x<0$) ಮತ್ತು x ನ ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಧನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $f\ (x)=\frac{1}{2}$, (ಅಂದರೆ $x\geqslant 0$) ಆಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು 11.3 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. x ನ ಋಣ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಕ್ಷೆಯು x—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ



ಚಿತ್ರ 11.3

ಒಂದು ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. x ನ ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಧನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಕ್ಷೆಯು ಪುನಃ x—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆ ಆದರೆ ಈಗ ಅದರ ದೂರ $\frac{1}{2}$ ಮಾನ. $x=0$ ಆದಾಗ ನಕ್ಷೆಯು ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ (ತುಂಡಾಗಿದೆ) ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಿದರೆ 0 ಯನ್ನು ದಾಟುತ್ತಿದ್ದಂತೆ ನಾವು $\frac{1}{2}$ ಮಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಧುಮುಕಬೇಕಾಗುವುದು! ಈ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ನಾವು $x=0$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಪರಮಾವಧಿ ಬೆಲೆಯಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. x ಶೂನ್ಯ

value 1 ; whereas if x approaches 0 from the right through positive values, the function approaches the value $\frac{1}{2}$.

Most of the functions we are familiar with are continuous for all values of x. We give below important examples of continuous functions : (i) $f(x)=x$ (ii) $f(x)=x^2$ (iii) $f(x)=ax^2+bx+c$, where a, b, c are constants, (iv) $f(x)=x^n$ where n is a positive integer, (v) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, where n is a positive integer and the a's are constants, (vi) $f(x)=\sin x$, (vii) $f(x)=\cos x$.

For continuous functions like the above, the limit at any point is the actual value of the function at that point. For example the limit of $f(x)=2x^2+3x+4$ as x tends to 5 is $f(5)=2.5^2+3.5+4=69$.

11.7—Two Important Limits.

I $\quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$, where n is a positive integer.

Proof : If we substitute $x=a$ in the fraction we get the indeterminate expression $\frac{0}{0}$. This indicates that $(x-a)$ s a factor of the numerator. In fact we have

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+a^{n-1})}{(x-a)}$$

Now we can cancel the common factor from numerator and denominator *only if it is not zero*, that is, only if x is not equal to a . But in finding the limit we are concerned

ನ್ನು ಋಣ ದಿಶೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುವಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು 1 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು ; ಆದರೆ x ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ (ಧನದಿಶೆಯಿಂದ) ಸಮೀಪಿಸುವಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು.

ನಮಗೆ ಪರಿಚಯುವಿರುವ ಬಹುಪಾಲು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುವು. ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. (i) $f(x) = x$; (ii) $f(x) = x^2$ (iii) $f(x) = ax^2 + bx + c$; ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ಸ್ಥಿರಗಳು (iv) $f(x) = x^n$. n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ; (v) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n$, n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು a ಗಳು ಸ್ಥಿರಗಳು ; (vi) $f(x) = Sin\ x$; (vii) $f(x) = Cos\ x$

ಮೇಲೆ ಬರೆದಂತಹ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪರಮಾವಧಿಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ x, 5 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ

$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ ಇದರ ಪರಮಾವಧಿಯು,

$$f(5) = 2.5^2 + 3.5 + 4 = 69$$

11.7 ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಪರಮಾವಧಿಗಳು

I $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಸಾಧನೆ : $x = a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು $\dfrac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿಶ್ಚಿತ ರೂಪ ತಳೆಯುವುದು. ಇದರಿಂದ $(x - a)$ ಯು ಅಂಶದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x-a)\ (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1}}{(x-a)}$$

ಈಗ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಛೇದಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ $(x - a)$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು, $x - a$ಯ ಬೆಲೆ 0 ಆಗಿರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಹೊರತೆಗೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ

with values of x which are *near to a and not equal to* Hence for such values we can write

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots\ldots a^{n-1}$$

Now as x approaches a, each term on the right approach the value a^{n-1}. Since there are n such terms, we have

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

II $\lim\limits_{\varphi \to 0} \dfrac{\text{Sin } \phi}{\phi} = 1$

Here ϕ must be measured in radians. For $\varphi = 0$ we al have Sin $\phi = 0$. We have to prove that although bo

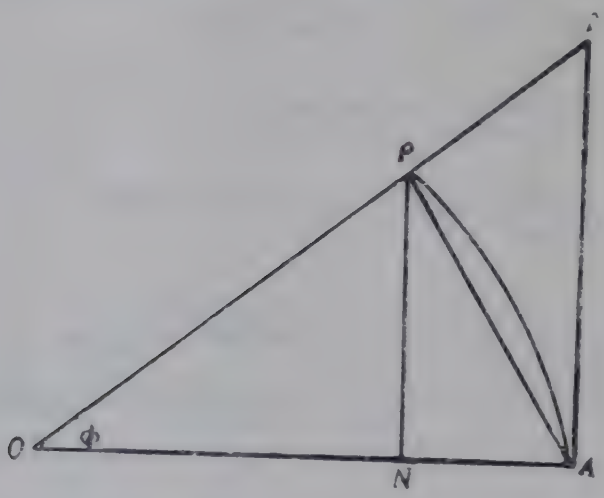


Fig. 11.4

numerator and denominator take the value zero, for $\phi =$ yet the fraction approaches or tends to the limit 1 as tends to zero.

In figure 11.4, let $\angle$AOP$=\phi$, A and P lying on circle with centre O. PN is perpendicular to OA and AT

ರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ aಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುವ (ಸಮವಾಗಿರುವ ಲ್ಲ) xನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಬೆಲೆ ಳಿಗೆ,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots\cdots a^{n-1}$$

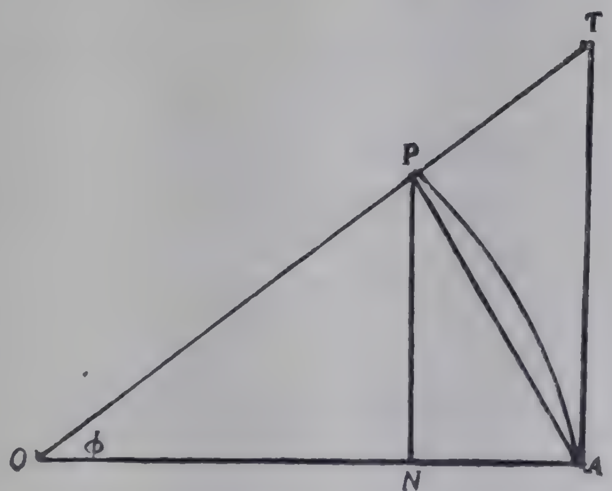
ಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

x, aಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವೂ $^{n-1}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಇಂತಹ n ಪದಗಳಿರುವುದರಿಂದ,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

II $$\lim_{\phi \to \theta} \frac{\text{Sin}\,\phi}{\phi} = 1$$

ಇಲ್ಲಿ ϕವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳತೆಮಾಡಬೇಕು. $\phi = 0$ ಆದಾಗ Sin $\phi = 0$. ಹೀಗೆ $\phi = 0$ ಆದಾಗ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರ ಬೆಲೆಯೂ 0.



ಚಿತ್ರ 11.4

ಆದರೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು (ϕ, 0ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ) ಪರಮಾವಧಿಯು ಒಂದನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು.

ಚಿತ್ರ 11·4 ರಲ್ಲಿ $\angle AOP = \phi$ ಎಂದಿರಲಿ. A ಮತ್ತು Pಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ. PN, OAಗೆ ಲಂಬ. ATಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ

the tangent at A meeting OP produced at T. □ From th[e] figure it is clear that

area of $\triangle$ OAP < area of sector OAP < area of $\triangle$ OAT

$\therefore \frac{1}{2}$ OA. NP $< \frac{1}{2}$ OA^2. $\phi < \frac{1}{2}$ OA. AT

Dividing throughout by $\frac{1}{2}$ OA^2 and using the fact tha[t] OA = OP we get.

$$\frac{NP}{OA} < \phi < \frac{AT}{OP}$$

i.e. $\sin\phi < \phi < \tan\phi$.

Dividing throughout by Sin ϕ, which is positive fo[r] small positive values of ϕ, the inequality becomes

$$1 < \frac{\phi}{Sin\ \phi} < \frac{1}{Cos\ \phi}$$

or taking the reciprocals and reversing the inequalities we get

$$1 > \frac{Sin\ \phi}{\phi} > Cos\ \phi$$

Now as $\phi \to 0$, Cos $\phi \to 1$. Hence $\frac{Sin\ \phi}{\phi}$ lies between 1 an[d] a quantity which tends to the value 1. It follows that

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{Sin\ \phi}{\phi} = 1 \qquad \text{....11.[illegible]}$$

Examples :—(1) Evaluate $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

Both numerator and denominator take the valu[e] zero for $x=2$. Hence $x-2$ is a factor of both, and w[e] have

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \frac{(x+3)\ (x-2)}{(x+1)\ (x-2)}$$

$$= \frac{(x+3)}{(x+1)}, \text{ provided } x \neq 2$$

Aಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ. ಅದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ OPಯನ್ನು Tಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. ಚಿತ್ರದಿಂದ

$\triangle OAP$ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $<OAP$ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾ, $< \triangle OAT$ಯ

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\therefore \frac{1}{2} OA \cdot NP < \frac{1}{2} \cdot OA^2 \phi < \frac{1}{2} OA \cdot AT$

ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. $OA = OP$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{NP}{OP} < \phi < \frac{AT}{OA}$$

$$\therefore \text{Sin}\,\phi < \phi < \tan\phi$$

ϕದ ಸಣ್ಣ ಧನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\text{Sin}\,\phi$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ: $\text{Sin}\,\phi$ ಯಿಂದ ಮೇಲಿನ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ

$$1 < \frac{\phi}{\text{Sin}\,\phi} < \frac{1}{\text{Cos}\,\phi}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದರ ವಿಪರ್ಯವು (ಆಗ ಅಸಮತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ವಿರೋಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು)

$$1 > \frac{\text{Sin}\,\phi}{\phi} > \text{Cos}\,\phi$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈಗ $\phi \to 0$, $\cos\phi \to 1$ (ಎಡಗಡೆಯಿಂದ).

$\therefore \frac{\text{Sin}\,\phi}{\phi}$ ಯು 1ಕ್ಕೂ, 1ನ್ನು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಕೇತಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇದೆ.

$$\therefore \lim_{\phi \to 0} \frac{\text{Sin}\,\phi}{\phi} = 1 \qquad \ldots 11.2$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x=2$ ಆದಾಗ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರ ಬೆಲೆಯೂ 0 ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $(x-2)$ ಎಂಬುದು ಎರಡರ ಅಪವರ್ತನವೂ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \frac{(x+3)\,(x-2)}{(x+1)\,(x-2)} = \frac{x+3}{x+1},\ x \neq 2$$

ಆದರೆ ಮಾತ್ರ

Hence as x approaches the value 2, the given fraction approaches the value $\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$. This is the required limit.

(2) Evaluate $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

When $\theta=0$, $1-\cos\theta=1-\cos 0=1-1=0$

To find the limit as $\theta\to 0$, we first simplify the expression as follows :—

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}^2$$

putting $\frac{\theta}{2}=x$, we have $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, (11.2)

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\times 1^2=\tfrac{1}{2}.$$

Exercise 11.2

1 If $f(x)=3x^3-2x^2+5x-4$ find the values of $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ and $f(3)$.

2 If $f(x)=\frac{12}{2+x^2}$, find $f(0)$, $f(1)$ and $f(-2)$.

ಈಗ x , 2 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಇದು ಬೇಕಾದ ಪರಮಾವಧಿ.

(2) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \text{Cos}\ \theta}{\theta^2}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\theta = 0$ ಆದಾಗ, $1 - \text{Cos}\ \theta = 1 - \text{Cos}\ 0 = 1 - 1 = 0$ $\theta \to 0$ ಆದಾಗ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ನಾವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{1 - \text{Cos}\ \theta}{\theta^2} = \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

$\frac{\theta}{2} = x$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ (11.2)$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\ \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 11.2

1 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ ಆದರೆ, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ ಮತ್ತು $f(3)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 $f(x) = \frac{12}{2 + x^2}$ ಆದರೆ, $f(0)$, $f(1)$, ಮತ್ತು $f(-2)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 If $f(x)=x+\frac{1}{x}$ show that $f(x)=f(1/x)$

4 A function $f(x)$ is defined as follows :

$$f(x)=-x, \text{ for } x<0,$$

$$f(x)=x \text{ for } x\geqslant 0.$$

Draw the graph of the function and examine whether it is continuous at $x=0$.

5 Repeat exercise **4** for the following function :—

$$f(x)=x \text{ for } x<0,$$

$$f(x)=1 \text{ for } x\geqslant 0$$

Evaluate the following limits :—

6 $\lim\limits_{x\to 0} (2x^2+3x+4)$

7 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+9}{x+3}$

8 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

9 $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{1x^2+4x+3}$

10 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{3x+1}$

11 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$

3 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ಆದರೆ $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4 $f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

$f(x) = -x,\ x<0$ ಇರುವಾಗ

$f(x) = x,\ x\geqslant 0$ ಇರುವಾಗ

ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದು $x = 0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

5 4 ನೇ ಅಭ್ಯಾಸದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$f(x) = x, \quad x < 0$ ಇರುವಾಗ

$f(x) = 1, \quad x \geqslant 0$ ಇರುವಾಗ

ಪರಮಾವಧಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 $\lim\limits_{x\to 0} (2x^2+3x+4)$

7 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+9}{x+3}$

8 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

9 $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

10 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{3x+1}$

11 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$

12 $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$

13 $\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x+2}$

14 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$

15 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin n\theta}{\theta}$

16 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$

17 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$

18 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin a\theta}{\tan b\theta}$

11.7 Two Important Limits

I $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$, where *n is any rational number.*

1. First let n be a positive integer. Then

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\dots\dots+a^{n-1})}{(x-a)}$$

We can cancel the common factor $(x-a)$ from numerator and denominator only if it is not zero. But in finding the limit as $x\to a$ we are concerned with values of x *near* a and *not* the value $x=a$. Hence for such values we can write

$$\frac{x^n-a^n}{x\to a} = x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\dots\dots+a^{n-1}$$

12 $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$

13 $\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$

14 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{Sin} 2\theta}{\theta}$

15 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{Sin} n\theta}{\theta}$

16 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$

17 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{Sin} m\theta}{\operatorname{Sin} n\theta}$

18 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{Sin} a\theta}{\tan b\theta}$

11·7 ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಪರಮಾವಧಿಗಳು

I n ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಾಗ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$$

1 n ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಮೊದಲು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})}{x - a}$$

$x - a$ ಯು ಶೂನ್ಯ ಆಗಿರದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ aಯ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ xನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆಯೇ ವಿನಾ $x = a$ ಎಂಬು ದನ್ನಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಅಂತಹ $x \neq a$ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಾವು

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

Now as x approaches a, each term on the right approaches the value a^{n-1}. Since there are n such terms, we have

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

for any positive integer n.

2 Let n be a negative integer. We can write $n = -m$, where m is a positive integer.

Then $$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} = -\frac{1}{x^m a^m} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = -\lim_{x \to a} \frac{1}{x^m a^m} \lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$= \frac{1}{a^m a^m} \cdot ma^{m-1}$$ since m is a positive integer.

$$= -ma^{-m-1} = na^{n-1}$$

Hence the theorem is true for any negative integer n

3 Finally let

$n = \frac{p}{q}$, where p, q are integers.

Put $x^{\frac{1}{q}} = y$ and $a^{\frac{1}{q}} = b$. Then $x = y^q$, $a = b^q$, Also as $x \to a$ $y \to b$ and we have

$$\therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a} = \frac{y^p - b^q}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{y^p - b^p}{y - b} \div \frac{y^q - b^q}{y - b}$$

x , aಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಬಲಗಡೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಬೆಲೆಯೂ a^{n-1} ಯನ್ನೇ ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಇಂತಹ n ಪದಗಳು ಇಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$$

ಇಲ್ಲಿ n ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

2 n ಯಾವುದೇ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $n = -m$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು, m ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಆಗ, $$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} = -\frac{1}{x^m a^m} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = -\lim_{x \to a} \frac{1}{x^m a^m} \lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$$

$$= -\frac{1}{a^m a^m}\, m\, a^{m-1},$$ (m ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

$$= -m\, a^{-m-1} = n\, a^{n-1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು nನ ಯಾವುದೇ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

3 ಕೊನೆಯದಾಗಿ, $n = \frac{p}{q}$, ಎಂದಿರಲಿ. p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಗಳು.

$x^{\frac{1}{q}} = y$ ಮತ್ತು $a^{\frac{1}{q}} = b$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಆಗ $x = y^q$, $a = b^q$ ಎಂದಾಗುವುವು. ಅಲ್ಲದೇ $x \to a$ ಆಗುವಾಗ, $y \to b$

$$\therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{a - a} = \frac{y^p - b^q}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{y^p - b^p}{y - b} \div \frac{y^q - b^q}{y - b}$$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{y\to b} \frac{y^p - b^p}{y - b} \div \lim_{y\to b} \frac{y^q - b^q}{y - b}$$

$= pb^{p-1} \div qb^{q-1}$, (since p, q are integers)

$$= \frac{p}{q} b^{p-q} = \frac{p}{q} a^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q} - 1} = na^{n-1}$$

Hence the theorem is true for any rational number n.

Examples :

(1) $\lim_{x\to a} \frac{x^5 - a^5}{x - a}\ 5 = a^4$

(2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^{-4} - 2^{-4}}{x - 2} - 4.2^{-5} = -\frac{1}{8}$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{y\to b} \frac{y^p - b^p}{y - b} \div \lim_{y\to b} \frac{y^q - b^q}{y - b}$$

$= pb^{p-1} \div qb^{q-1}$, (p, qಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

$$= \frac{p}{q} b^{p-q} = \frac{p}{q} a^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} = na^{n-1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು nನ ಯಾವುದೇ ಪರಿಮೇಯ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (1) $\lim_{x\to a} \frac{x^5 - a^5}{x - a} = 5a^4$

(2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^{-4} - 2^{-4}}{x - 2} - 4\cdot 2^{-5} = -\frac{1}{8}$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

CHAPTER 12

Differentiation

12.1 Let us consider a function $y=f(x)$ for some specified value of x. We now perform an operation on the function at the point x so as to obtain a new function. The operation is as follows :—

Suppose the value of x is altered slightly to $x+\delta x$. δx (read together as "*delta x*") is a small quantity added to x and is called the *increment* in x. Let the corresponding value of y be called $y+\delta y$, so that δy is the increment in y corresponding to the increment δx in x. If the function $f(x)$ is continuous, then δy will also be small when δx is small. The increment δx may be made to vary. For example we may take $\delta x=10^{-6}$ or 12^{-7} or 15^{-8} etc. For each value of dx there will be a corresponding value of δy. δy is therefore a function of δx.

We now consider the limiting value of the ratio $\delta y/\delta x$ as δx approaches zero. This limit, if it exists, is called the *derivative* or *differential co-efficient* of the given function $f(x)$ and is generally denoted by $f'(x)$ or $Df(x)$ or dy/dx. In the last form dy and dx should be read together. We thus have

$$f'(x) \text{ or } Df(x) \text{ or } \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \quad \ldots \quad (12.1)$$

ಅಧ್ಯಾಯ 12

ಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ

12.1 $y=f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, xಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ನಡೆಸಿ ಹೊಸತೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ಅದರ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿದೆ :—

xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅತ್ಯಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತಗೊಳಿಸಿ $x+\delta x$ ಎಂದು ಮಾಡಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ δx (ಡೆಲ್ಟಾ x ಎಂದು ಇದನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಓದಬೇಕು) ಎಂಬುದು xಗೆ ಕೂಡಿಸಿರುವ ಒಂದು ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣ. ಇದನ್ನು xನಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವ ವೃದ್ಧಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ yಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯು $y+\delta y$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ xನಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿಯು δy ಆಗಿದೆ. $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ δx ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿರುವಾಗ δy ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪವೇ ಆಗಿರುವುದು. δx ಎಂಬ ವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ನಾವು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿ ಆರಿಸಬಹುದು— ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\delta x=10^{-6}$ ಅಥವಾ 12^{-7} ಅಥವಾ 15^{-8} ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ. δxನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ δyಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ δyಯು δxನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ನಾವೀಗ δx ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಪರಮಾವಧಿ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟಾಗುವುದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಂತಹ ಪರಮಾವಧಿಯೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ಕಲನಾಂಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $f'(x)$ ಅಥವಾ $Df(x)$ ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೊನೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ dy ಮತ್ತು dx ಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಓದಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $f'(x)$ ಅಥವಾ $Df(x)$ ಅಥವಾ

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \quad \ldots\ldots (12.1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

The process of obtaining the derivative is called *differentiation.* The subject of *Differential Calculus* deals with derivatives, their properties and applications.

As the method of differentiation is of fundamental importance, we summarise the procedure for finding the derivative of the function $y=f(x)$ as follows :—

1 Give a small increment δx to the independent variable x and calculate the corresponding increment δy in the function. We have the equations :—

$$y+\delta y=f(x+\delta x)$$
$$y=f(x)$$
$$\therefore \quad \delta y=f(x+\delta x)-f(x)$$

2 Examine the ratio $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ This will contain terms involving δx in both numerator and denominator. We have to find the limit of this ratio as $\delta x \to 0$. Although both numerator and denominator become zero when $\delta x=0$ yet the ratio may tend to a finite limit.

3 Simplify $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ It may be possible to cancel δx as a common factor from both numerator and denominator. Or it may be possible to combine the terms so that the limit can be obtained.

4 Evaluate $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ This gives the derivative of the function.

Examples

(1) *Find the derivative of the function* $y=x^2$ Let δy be the increment in y corresponding to a small increment δx in x. We have

$$y+\delta y=(x+\delta x)^2$$
$$y=x^2$$

ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲನಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕಲನಚಲನ ಶಾಸ್ತ್ರವು ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು, ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿ ಇದೆ. ಕಲನಕ್ರಿಯಾಕ್ರಮ ಅತಿಮುಖ್ಯ ಮೂಲಪರಿಕರ್ಮವಾದುದರಿಂದ $y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನದ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

I ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ x ಗೆ δx ಎನ್ನುವ ಸೂಕ್ಷ್ಮವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಗಾಮೀವೃದ್ಧಿ δyನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವುವು: $y + \delta y = f(x + \delta x)$

$$y = f(x)$$

$$\therefore \quad \delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

II $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ δx ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಪದಗಳಿರುವುವು. $\delta x \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. $\delta x = 0$ ಆದಾಗ ಅಂಶ, ಛೇದಗಳೆರಡೂ ಶೂನ್ಯವಾದರೂ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಒಂದ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಬಹುದು.

III $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬೇಕು. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ δx ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ದೊರೆಯಬಹುದು. ಆಗ ಅದನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

IV $\underset{\delta x \to 0}{Limit} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ನೀಡುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು—(1) $y = x^2$ ಇದರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

xನ ಸೂಕ್ಷ್ಮವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yನ ಸಹಗಾಮಿ ವೃದ್ಧಿ δy ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 \text{ ಆಗುವುದು.}$$

$$y = x^2$$

$$\therefore \quad \delta y=(x+\delta x)^2-x^2$$

$$\delta y=x^2+2x\ \delta x+(\delta x)^2-x^2$$

$$=2x\ \delta x\ +(\delta x)^2= \ \delta x[2x+\delta x]$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta x(2x+\delta x)}{\delta x}$$

$= \ 2x+\delta x$, cancelling δx from both numerator and denominator since $\delta x \neq 0$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\ (2x+\delta x)=2x+0=2x$$

Hence if $y=x^2$, $\dfrac{dy}{dx}=2x$

2 *If* $f(x)=2x^2-3x$, *find* $f'(-1)$, $f'(0)$ and $f'(2)$. We shall first find the derivative $f'(x)$. Let δx be a small increment in x. Then the increment in the function $f(x)$ is

$$f(x+\delta x)-f(x)=[2(x+\delta x)^2-3(x+\delta x)]-(2x^2\ 3x)$$

$$=[2x^2+4x\ \delta x+2(\delta x)^2-3x-3\delta x-(2x^2-3)$$

$$=(4x-3)\ \delta x+2(\delta x)^2$$

$$\frac{(f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=\frac{(4x-3)\delta x+2(\delta x)}{\delta x}$$

$$=(4x-3)+2\ \delta x\quad ,\quad \text{for } \delta x\neq 0$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\ \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\ =\ 4x-3+2\times 0$$

or $\quad f'(x)=4x-3$

$$\therefore f'(-1)=4\times(-1)-3=-7$$

$$f'(0)=4\times 0-3=-3$$

$$f'(2)=4\times 2-3=5$$

$$\therefore \quad \delta y = (x+\delta x)^2 - x^2$$

$$\delta y = x^2 + 2x\cdot\delta x + (\delta x)^2 - x^2$$

$$= 2x\cdot\delta x + (\delta x)^2$$

$$= \delta x[2x+\delta x]$$

$\therefore \quad \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\delta x[2x+\delta x]}{\delta x} = 2x+\delta x, \; \delta x \neq 0$ ಆದುದರಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ δxನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} (2x+\delta x) = 2x + 0 = 2x$$

$\therefore \quad y = x^2$ ಎಂದಿರುವಾಗ, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

(2) $f(x) = 2x^2 - 3x$ ಎಂದಿರುವಾಗ $f'(-1)$, $f'(0)$ ಮತ್ತು $f'(2)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಾವು ಮೊದಲು $f'(x)$ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. δx ಎಂಬುದು xನ ಒಂದು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ನ ವೃದ್ಧಿಯು

$$f(x+\delta x) - f(x) = [2(x+\delta x)^2 - 3(x+\delta x)] - (2x^2 - 3x)$$

$$= [2x^2 + 4x\cdot\delta x + 2(\delta x)^2 - 3x - 3\delta x] - (2x^2 - 3x)$$

$= (4x-3)\,\delta x + 2(\delta x)^2$, ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{(4x-3)\,\delta x + 2(\delta x)^2}{\delta x}$$

$= 4x - 3 + 2\cdot\delta x, \; \delta x \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ.

$$\therefore f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = 4x - 3 + 2\times 0$$

ಅಥವಾ $f'(x) = 4x - 3$

$$\therefore f'(-1) = 4\times(-1) - 3 = -7$$

$$f'(0) = 4\times 0 - 3 = -3$$

$$f'(2) = 4\times 2 - 3 = 5$$

12.2 Geometrical Meaning of the Derivative—Let P be the point on the graph of the function $y=f(x)$ corresponding to the value x (Fig. 12.1). The coordinates

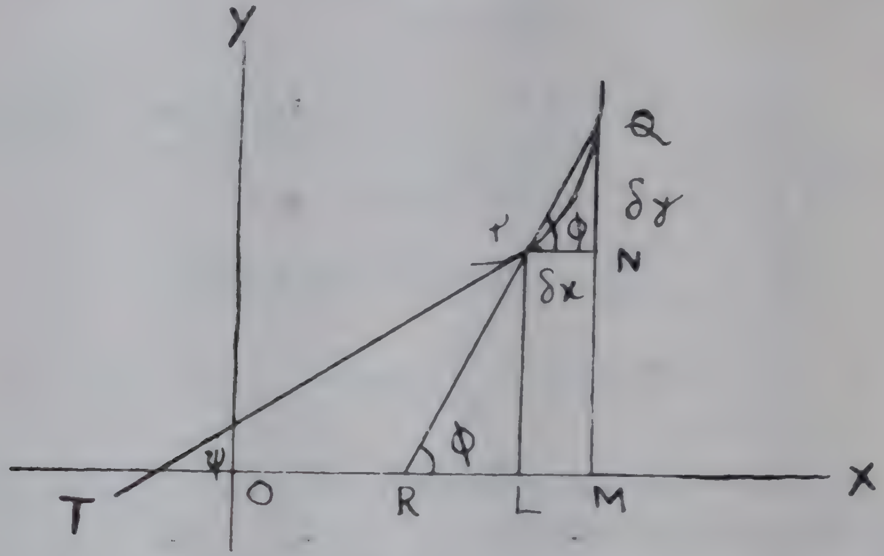


Fig. 12.1

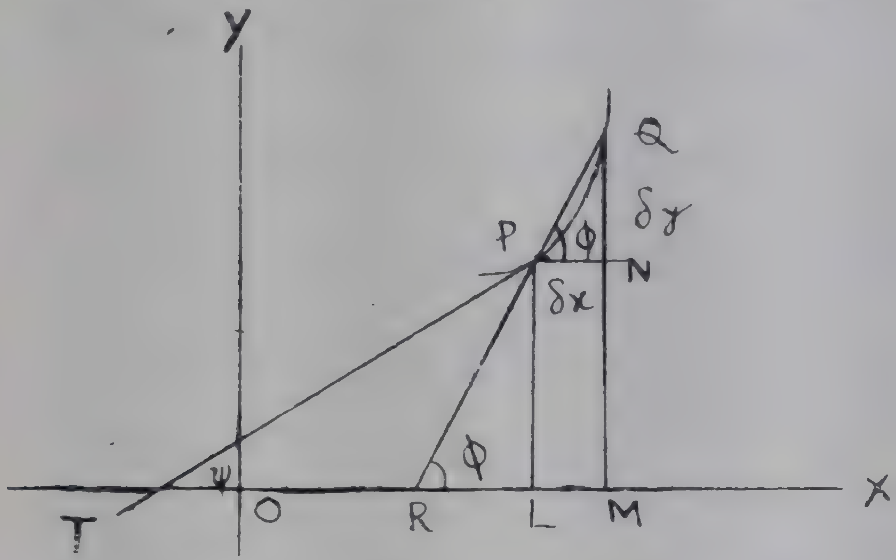
of P are (x, y) where $OL=x$, $LP=y$. Let Q be the point on the graph with coordinates $(x+\delta x, y+\delta y)$. Since δx and δy are both small, Q will be a point on the curve *close to P* and from the figure we see that $LM=PN=\delta x$ and $NQ=\delta y$.

Now $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{NQ}{PN}=\tan\phi$. where ϕ is the angle which the chord PQ makes with the *x–axis* As $\delta x \to 0$, the point Q approaches P along the curve. In the limit the chord PQ becomes the tangent PT at P. Also the angle ϕ becomes the angle ψ between this tangent and the *x-axis*. Hence we have the important result :—

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\tan\psi \qquad \ldots(12.2)$$

12.2 ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ P ಯು x ಬೆಲೆಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 12.1) P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y). ಇಲ್ಲಿ $OL=x$,



ಚಿತ್ರ 12.1

$LP=y$. ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ Q ಎಂಬುದು $(x+\delta x, y+\delta y)$ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. δx ಮತ್ತು δy ಎರಡೂ ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿಗೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅತಿಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ. ಚಿತ್ರದಿಂದ $LM = PN = \delta x$ ಮತ್ತು $NQ = \delta y$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{NQ}{PN} = \tan\phi$, ಇಲ್ಲಿ QP ಜ್ಯಾವು x-ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ϕ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ $\delta x\to 0$ ಆದಂತೆ Q ಬಿಂದುವು Pಯನ್ನು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮೇಣ ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಪರಮಾವಧಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ PQ ಜ್ಯಾವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PT ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು. ϕಕೋನವು ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೂ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ನಡುವೆಯಿರುವ ψಕೋನವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಹೀಗಾಗಿ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುವುದು—

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\tan\Psi \qquad \text{.... (12.2)}$$

In words. "*The value of the derivative at any point P on the graph of a function is equal to the slope of the tangent at P.*"

Example :

Find the slope of the tangent to the curve $y=\frac{1}{x}$ *at the point* $(2, \frac{1}{2})$

We first verify that the point $(2, \frac{1}{2})$ lies on the given curve.

Substituting $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ we easily see that the equation $y=\frac{1}{x}$ is satisfied.

To find the slope of the tangent at this point we have to find the value of

$$\frac{dy}{dx} \text{ for } x=2,\ y=\tfrac{1}{2}$$

To find $\frac{dy}{dx}$

Let δy be the increment in y corresponding to an increment δx in x then

$$y+\delta y = \frac{1}{x+\delta x}$$

$$\therefore \quad \delta y = \frac{1}{x+\delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\delta x)}{x(x+\delta x)} = \frac{-\delta x}{x(x+\delta x)}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-1}{x(x+\delta x)}, \quad \delta x \neq 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{-1}{x\,(x+\delta x)} = -\frac{1}{x\,(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$$

We have proved that for

$$y=\frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Hence the slope of the tanqent at $(2, \frac{1}{2})$

$$= -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

ಇದನ್ನು ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆಂದು ಬರೆಯಬಹುದು : "ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂಂದು ಬಿಂದು Pಯಲ್ಲಿ ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು Pಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ."

ಉದಾಹರಣೆ : $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y=\frac{1}{x}$ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ಬಿಂದುವು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆಯೆಂದು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸೋಣ. $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಲಾಗಿ $y=\frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ತಾಳೆ ಹೊಂದುವುದು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು $\frac{\delta y}{\delta x}$ ನ ಬೆಲೆಯನು $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$\frac{dy}{dx}$ ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮ—

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯ್ಯ ಸಹಗಾಮೀವೃದ್ಧಿ δy ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $y+\delta y=\frac{1}{x+\delta x}$

$$\therefore \ \delta y=\frac{1}{x+\delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\delta x)}{x(x+\delta y)}=\frac{-\delta x}{x(x+\delta x)}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{1}{x(x+\delta x)}$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ δxನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದ್ದೇವೆ, $\delta x\neq 0$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}-\frac{1}{x(x+\delta x)}=-\frac{1}{x(x+0)}=-\frac{1}{x^2}$$

$y=\frac{1}{x}$ ಆದರೆ $\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{1}{x^2}$ ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ಸಾಧಿಸಿದೇವೆ.

$\therefore\left(2, \ \frac{1}{2}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ

$$=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$$

12.3 Derivative of the function $y=x^n$ where n is an integer or a rational number, positive or negative.

Let δy be the increment in y corresponding to an increment δx in x

We have

$$y+\delta y=(x+\delta x)^n$$

$$y=x^n$$

$$\delta y=(x+\delta x)^n-x^n$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{(x+\delta x)^n-x^n}{\delta x}$$

$$=\frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x}$$

We have proved in para 11.7

$$\text{that } \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

where n is any positive or negative integer or fraction. Now if we replace x and a by $x+\delta x$ and x respectively, we see that this limit may be put in the form

$$\lim_{(x+\delta x)\to x} \frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x}=nx^{n-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0} \frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x} = nx^{n-1}$$

$$\therefore \text{ If } y=x^n, \frac{dy}{dx}=nx^{n-1} \quad \text{.... (12.3)}$$

where n is any positive or negative integer or fraction.

Examples :—

(1) $n=10$: $y=x^{10}$, $\dfrac{dy}{dx}=10x^9$

(2) $n=1$: $y=x$, $\dfrac{dy}{dx}=1x^0=1$

12·3 n ಯಾವುದೇ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $y=x^n$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ.

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯ್ಯ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿ δy ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$y+\delta y=(x+\delta x)^n$$

$$y=x^n$$

$$\delta y=(x+\delta x)^n-x^n$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{(x+\delta x)^n-x^n}{\delta x}$$

$$=\frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x}$$

ನಾವು 11.7ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ n ಯಾವುದೇ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}=nx^{n-1}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

x ಮತ್ತು a ಗಳ ಬದಲಾಗಿ $x+\delta x$ ಮತ್ತು x ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ ಈ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು

$$\lim_{(x+\delta x)\to x} \frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x}=nx^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{(x+\delta x)^n-x^n}{(x+\delta x)-x}=nx^{n-1}$$

$\therefore \quad y=x^n$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, $\frac{dy}{dx}= nx^{n-1}$ .... (12·3)

n ಯಾವುದೇ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :—

(1) $n=10, \quad y=x^{10}, \ \frac{dy}{dx}=10x^9$

(2) $n=1, \quad y=x, \ \frac{dy}{dx}=1x^0=1$

(3) $n=-5: \quad y=x^{-5}, \quad \dfrac{dy}{dx}=-5x^{-6}$

(4) $n=\frac{1}{2}: \quad y=x^{\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(5) $n=-\frac{1}{2}: \quad y=x^{-\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x^{-3/2}$

12.4 Derivatives of the functions sin x and cos x

I. Let $y=\sin x$

If δy is the increment in y corresponding to an increment δx in x, we have

$$y+\delta y=\sin(x+\delta x)$$

$$y=\sin x$$

$$\therefore \ \delta y=\sin(x+\delta x)-\sin x$$

Applying the formula $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

with $A=x+\delta x$, $B=x$ we have

$$\delta y=2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

We have proved (see para 11.6) that $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\text{Sin}\,\theta}{\theta}=1$

Hence putting $\theta=\dfrac{\delta x}{2}$ we have $\lim\limits_{\frac{\delta x}{2}\to 0}\dfrac{\text{Sin}\,\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}=1$

(3) $n=-5,\ y=x^{-5},\ \frac{dy}{dx}=-5x^{-6}$

(4) $n=\frac{1}{2},\quad y=x^{\frac{1}{2}},\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(5) $n=-\frac{1}{2},\ y=x^{-\frac{1}{2}},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x^{-3/2}$

12.4 *Sin x* ಮತ್ತು *Cos x* ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

I $y=Sin\ x$ ಎಂದಿರಲಿ. xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯ ಸಹಗಾಮೀವೃದ್ಧಿ δy ಆಗಿರಲಿ,

$$\therefore\quad y+\delta y=Sin\ (x+\delta x)$$

$$y=Sin\ x$$

$$\therefore\quad \delta y=Sin\ (x+\delta x)-Sin\ x$$

$$sin\ A-sin\ B=2\ cos\ \frac{A+B}{2}\ sin\ \frac{A-B}{2}$$ ಎಂಬ

ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $A=x+\delta x,\ B=x$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\delta y=2\ cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)sin\ \frac{\delta x}{2}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore\quad \frac{\delta y}{\delta x}=cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\frac{sin\ \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

ಪರಿಚ್ಛೇದ 11.6ರಲ್ಲಿ ನಾವು $\lim_{\theta\to 0}\frac{Sin\ \theta}{\theta}=1$ ಎಂದು

ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. $\theta=\frac{\delta x}{2}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\lim_{\left(\frac{\delta x}{2}\right)\to 0}\frac{Sin\ \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}=1$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \text{Cos}\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \lim_{\frac{\delta x}{2} \to 0} \frac{\text{Sin}\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \cos(x+0) \times 1 = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\text{Sin}\ x\right) = \text{Cos}\ x \qquad \text{.... (12.4)}$$

II. Let $y = Cos\ x$

If δy is the increment in y corresponding to an increment δx in x we have

$$y + \delta y = cos\ (x + \delta x)$$

$$y = \cos x$$

$$\therefore \ \delta y = cos\ (x + \delta x) - \cos x$$

Applying the formula

$$cos A - cos B = 2\ sin\ \frac{A+B}{2}\ sin\ \frac{B-A}{2},$$

we have for $A = x + \delta x$, $B = x$,

$$\delta y = 2\ sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= -2\ sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) sin\ \frac{\delta x}{2},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[-sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\right] \times \lim_{\left(\frac{\delta x}{2}\right) \to 0} \frac{sin\ \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= -sin\ (x+0) \times 1$$

$$= -sin\ x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(cos\ x) = -sin\ x \qquad \text{.... (12.5)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} Cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \lim_{\frac{\delta x}{2} \to 0} \frac{Sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \quad Cos\ (x+0) \times 1 = Cos\ x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(Sin\ x \right) = Cos\ x \qquad \ldots.(12{\cdot}4)$$

II $y = Cos\ x$ ಎಂದಿರಲಿ.

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯ್ಯ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿ δyಆಗಿರಲಿ.

$$y + \delta y = cos\ (x + \delta x)$$

$$y = cos\ x$$

$$\therefore \quad \delta y = cos\ (x + \delta x) - cos\ x$$

$cos\ A - cos\ B = 2\ sin\ \frac{A+B}{2}\ sin\ \frac{B-A}{2}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ

$A = x + \delta x,\ B = x$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\delta y = 2\ sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= -2\ sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) sin\ \frac{\delta x}{2},$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[-sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\right] \times \lim_{\left(\frac{\delta x}{2}\right) \to 0} \frac{sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= -sin\ (x+0) \times 1$$

$$= \quad sin\ x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(cos\ x) = -sin\ x \qquad \ldots.(12.5)$$

12.5. Theorems on Derivatives :—

So far we have been finding the derivative of a function, *from first priniciples,* directly from the definition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

This method is necessary to find the derivatives of standard functions like x^n, $\sin x$ and $\cos x$. But for more complicated functions the method is laborious and difficult. We shall now prove a number of theorems which will enable us to find the derivatives of many functions without much difficulty.

Theorem I. The Derivative of a constant is zero.

Let $y=c$, where c is constant for all values of x. Then for an increment δy corresponding to an increment δx we have

$$y+\delta y=c$$

$$\delta y=0 \text{ for all values of } \delta x.$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=0 \text{ for all } \delta x=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 0 \qquad \text{.... (12.6)}$$

Theorem II. If $y=cu$, where c is a constant and u is a function of x, then $\dfrac{dy}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$

Let δx be an increment in x and δu, δy the corresponding increments in the functions u and y respectively.

$$\text{Then } y+\delta y=c(u+\delta u)$$

$$y=cu$$

$$\therefore \delta y=c\delta u$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = c\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\text{Hence } \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = c \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx} \qquad \text{.... (12.7)}$$

12.5 ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಪ್ರಮೇಯಗಳು—ಇದುವರೆಗ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ತ್ವಗಳಿಂದ. ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ ಎನ್ನುವ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ. x^n, $\sin x$, $\cos x$ ಗಳಂತಹ ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಕ್ರಮ ಅಗತ್ಯ. ಆದರೆ ಇನ್ನೂ ಜಟಿಲವಾದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಈ ಕ್ರಮವು ಪ್ರಯಾಸಕರವೂ ಕಷ್ಟವಾದದ್ದೂ ಆಗಿದೆ. ನಾವೀಗ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹಲವಾರು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ I. ಸ್ಥಿರದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ.

$y = c$, ಎಂದಿರಲಿ. cಯು xನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ. ಆಗ xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ yಯ್ಯ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿ δy ಆಗಿರುವುದು.

$$y + \delta y = c$$

$\therefore$ δxನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $\delta y = 0$,

$\delta y \neq 0$ ಆದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 0 \qquad \text{.... (12.6)}$$

ಪ್ರಮೇಯ II. c ಯು ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು u ವು xನ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದು

$y = cu$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$$

xನ ವೃದ್ಧಿ δx ಆಗಿರಲಿ. u ಮತ್ತು y ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿಗಳು δu ಮತ್ತು δy ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$y + \delta y = c\,(u + \delta u)$$

$$y = c\,u$$

$$\therefore \quad \delta y = c\delta u$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = c\,\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = c \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$ .... (12.7)

Examples :—(1) Let $y = 5x^4$

$$\text{Then } \frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}(x^4) = 5 \times 4x^3 = 20 \times x^3$$

(2) Let $y = -6 \cos x$

$$\text{Then } \frac{dy}{dx} = (-6)\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= (-6)(-\sin x)$$

$$= 6 \sin x.$$

Theorem III. The derivative of the sum of two functions is the sum of their derivatives.

Let $y = u + v$, where u and v are functions of x. Let δy, δu, δv, be the increments in y, u, v respectively corresponding to the increment δx in x.

$$\text{Then } y + \delta y = (u + \delta u) + (v + \delta v)$$

$$y = u + v$$

$$\therefore \delta y = \delta u + \delta v$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \cdots (12.8$$

This theorem can easily be extended to the sum (or difference) of a finite number of functions.

Examples :—

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(-3x^2) + \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(-5)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x^3) - 3\frac{d}{dx}(x^2) + 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-5)$$

$$= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 4 \times 1 + 0$$

$$= 6x^2 - 6x + 4$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು. (1) $y=5x^4$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ, $\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}(x^4)=5\times 4x^3=20x^3$

(2) $y=-6 \cos x$ ಎಂದಿರಲಿ,

ಆಗ $\frac{dy}{dx}=(-6) \frac{d}{dx}(Cos\ x)$

$=(-6)(-sin\ x)$

$=6 \sin x$

ಪ್ರಮೇಯ III. ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಅವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

$y=u+v$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ u, vಗಳು xನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ y, u, vಗಳ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δy, δu, δvಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ $y+\delta y=(u+\delta u)+(v+\delta v)$

$y=u+v$

$\therefore \delta y=\delta u+\delta v$

$\therefore \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta x}$

$\therefore \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta u}{\delta x}+\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ .... (12·8)

ಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (1) $y=2x^3-3x^2+4x-5$

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(-3x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(4x\right)+\frac{d}{dx}\left(-5\right)$

$=2\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+4\frac{d}{dx}\left(x\right)+\frac{d}{dx}\left(-5\right)$

$=2\times 3x^2-3\times 2x+4\times 1+0$

$=6x^2-6x+4$

(2) $y = x^5 + 2 \sin x + 3 \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(2 \sin x) + \frac{d}{dx}(3 \cos x)$$

$$= 5x^4 + 2 \times \cos x + 3(-\sin x)$$

$$= 5x^4 + 2 \cos x - 3 \sin x.$$

Theorem IV. Derivative of the product of two functions: If $y = uv$, where u and v are functions of x, then

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Let δy, δu, δv be the increments in y, u, v respectively corresponding to an increment δx in x.

Then $y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v)$

$$y = u\ v$$

$$\therefore\ \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) - uv$$

$$= uv + u.\delta v + v.\delta u + \delta u.\delta v - uv$$

$$= u\delta v + v\delta u + \delta u.\delta v$$

$$\therefore\ \frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = u \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta v}{\delta x} + v \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0}\delta u; \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta v}{\delta x}$$

since $\delta u \to 0$ as $\delta x \to 0$, the last term tends to zero.

Hence $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ .... (12.9)

Examples :—(1) $y = x^2 \sin x$

Let $u = x^2$, $v = \sin x$

Then $\dfrac{du}{dx} = 2x$. $\dfrac{dv}{dx} = \cos x$. Since $y = uv$,

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= x^2 . \cos x + \sin x \times 2x$$

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

(2) $y=x^5+2\ Sin\ x+3\ Cos\ x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(2\ Sin\ x)+\frac{d}{dx}(3\ Cos\ x)$$

$$=5x^4+2\times \text{Cos}\ x+3\times(-Sin\ x)$$

$$=5x^4+2\ Cos\ x-3\ Sin\ x$$

ಪ್ರಮೇಯ IV. ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ :—u ಮತ್ತು vಗಳು xನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದು $y=uv$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ y, u, vಗಳ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δy, δu, δv ಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$y+\delta y=(u+\delta u)\ (v+\delta v)$$

$$y=uv$$

$$\delta y=(u+\delta u)\ (v+\delta v)-uv$$

$$=uv+u\delta v+u\delta v+\delta u\delta v-uv$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{\delta v}{\delta x}+v\frac{\delta u}{\delta x}+\delta u\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=u\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}+v\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}+\lim_{\delta x\to 0}\delta u\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{dx}.$$

$\delta x\to 0$ ಆದಂತೆ $\delta u\to 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಕೊನೆಯ ಪದವು 0 ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \quad ....(12{\cdot}9)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :—(1) $y=x^2\ sin\ x$

$u=x^2$, $v=sin\ x$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ $\frac{du}{dx}=2x$, $\frac{dv}{dx}=cos\ x$

$y=uv$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$=x^2\times cos\ x+sin\ x\times 2x$$

$$=x^2\ cos\ x+2x\ sin\ x$$

(2) $y = \text{Sin } x \cos x$

Let $u = \sin x$, $v = \cos x$

Then $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $\dfrac{dv}{dx} = -\sin x$

Since $y = uv$,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= \sin x \times (-\sin x) + \cos x\,(\cos x)$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

Theorem V :—The derivative of the quotient of two functions.

If $= \dfrac{y}{v}$. *where u and v are functions of x, then*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Let δu. δv, δy be the increments in u, v, y respectively corresponding to an increment δx in x.

Then $y + \delta y = \dfrac{u + \delta u}{v + \delta v}$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\therefore\ \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v\,(v + \delta v)}$$

$$\therefore\ \frac{\delta y}{dx} = \frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x} - u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v\,(v + dv)}$$

$$\therefore\ \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\lim\limits_{\delta x - 0}\dfrac{\delta u}{\delta x} - \lim\limits_{\delta x - 0}\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v\lim\limits_{\delta x - 0}(v + dv)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \cdots(12.10)$$

(2) $y = \sin x \cos x$

$u = \sin x.\ \ v = \cos x$ ಎಂದಿರಲಿ

$\frac{du}{dx} = \cos x, \qquad \frac{dv}{dx} = -\sin x$

$y = uv$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= \sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(\cos x)$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

ಪ್ರಮೇಯ V. ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ.

$y = \frac{u}{v}$. ಮತ್ತು u, v ಗಳು xನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ u, v, yಗಳ ಸಹಗಾಮೀ ವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δu, δv, δy ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\therefore\ \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}$$

$$\therefore\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta u}{\delta x} - u\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta v}{\delta x}}{v\lim_{\delta x \to 0}(v + \delta v)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \ldots\ (12.10)$$

This formula must be applied carefully. We may state it in words as follows :

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Derivative of a}\\ \quad\textit{quotient}\end{array}\right\} = \frac{\begin{array}{c}[\textit{denominator} \times \textit{derivative of numerator}]\\ -[\textit{numerator} \times \textit{derivative of denominator}]\end{array}}{(\textit{denominator})^2}$$

Examples :

(1) $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

Let $u = x^2$, $v = x^3+1$

$\dfrac{du}{dx} = 2x$, $\dfrac{dv}{dx} = 3x^2$ Since $y = \dfrac{u}{v}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(x^3+1)2x - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

(2) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

Let $u = \sin x$, $v = x^2$

Then $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $\dfrac{dv}{dx} = 2x$

Since $y = \dfrac{u}{u}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{x^2 \cos x - \sin x \times 2x}{(x^2)^2}$$

$= \dfrac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$, (cancelling x from numerator and denominator)

(3) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Let $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $v = x+1$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಬಳಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು—

$$\left.\begin{array}{c}\text{ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧದ}\\ \text{ನಿಷ್ಪನ್ನ}\end{array}\right\} = \frac{[\text{ಛೇದ} \times \text{ಅಂಶದ ನಿಷ್ಪನ್ನ} — \text{ಅಂಶ} \times \text{ಛೇದದ ನಿಷ್ಪನ್ನ}]}{(\text{ಛೇದ})^2}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :—(1) $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

$u = x^2, \quad v = x^3 + 1$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \dfrac{du}{dx} = 2x, \ \dfrac{dv}{dx} = 3x^2, \ y = \dfrac{u}{v}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(x^3+1)\ 2x - x^2\ (3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

(2) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

$u = \sin x, \ v = x^2$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ, $\dfrac{du}{dx} = \cos x, \ \dfrac{du}{dx} = 2x$

$y = \dfrac{u}{v}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{x^2 \cos x - \sin x \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

(3) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \ v = x + 1$ ಎಂದಿರಲಿ.

Then $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{dv}{dx}=1$

Since $y=\frac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}$$

$=\frac{\frac{1}{2}(x+1)-x}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}$ (multiplying numerator and denominator by $\sqrt{x}$)

$$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}$$

Exercises 12.1

Find $\frac{dy}{dx}$ for the following functions (1—7)

(1) $y=7x^5+4x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x}$

(2) $y=6/x^5+6x^5$

(3) $y=5/x^4+5x^5$

(4) $y=(4x+x^4)/x$

(5) $y=(1-x^3)\,(1-x)$

(6) $y=(1+x^3)\,(1+x)$

(7) $y=\frac{1+x^3}{1+x}$

Find the derivatives of the following functions (8—12)

(8) $\frac{x^2}{\cos x}$

(9) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

(10) $x^4\cos x$

(11) $\frac{\sin x}{x^2+1}$

(12) $\frac{2x^2+3x+4}{x^2-4x+5}$

ಆಗ $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}},\ \frac{dv}{dx}=1.$

$y=\frac{u}{v}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(x+1)-x}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^2}$$ [ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು $x^{\frac{1}{2}}$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ]

$$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}\ (x+1)^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 12·1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (1—7)

(1) $y=7x^5+4x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x}$, (2) $y=\frac{6}{x^5}+6x^5$

(3) $y=\frac{5}{x^4}+5x^5$, (4) $y=\frac{4x+x^4}{x}$

(5) $y=(1-x^3)\ (1-x)$, (6) $y=(1+x^3)\ (1+x)$

(7) $y=\frac{1+x^3}{1+x}$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (8—12)

(8) $\frac{x^2}{\cos x}$, (9) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

(10) $x^4 \cos x$, (11) $\frac{\sin x}{x^2+1}$,

(12) $\frac{2x^2+3x+4}{x^2-4x+5}$

12.6 Derivatives of tan x, cot x, sec x and cosec x

I. Let $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Applying the quotient formula 12.9 with

$$u = \sin x,\ v = \cos x,\ \frac{du}{dx} = \cos x,\ \frac{dv}{dx} = -\sin x$$

we get $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \text{.... (12.11)}$$

II Let $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Applying the quotient formula with $u = \cos x$, $v = \sin x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad \frac{dv}{dx} = \cos x$$

we get $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \times (-\sin x) - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x \qquad \text{.... (12.12)}$$

12.6 <u>*tan x, cot x* ಮಾತ್ತು *sec x* ಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು</u>

I $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, ಎಂದಿರಲಿ

$u = \sin x$, $v = \cos x$, $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $\dfrac{dv}{dx} = -\sin x$ ಎಂದು ಬರೆದು (12.9) ನೆಯ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \text{.... (12.11)}$$

II $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, ಎಂದಿರಲಿ

$u = \cos x$, $v = \sin x$, $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$, $\dfrac{dv}{dx} = \cos x$

ಎಂದು ಬರೆದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \times (-\sin x) - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x \qquad \text{....(12.12)}$$

III Let $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

Applying the quotient formula with $u=1$, $v=\cos x$

$\dfrac{du}{dx}=0$ $\dfrac{dv}{dx}=\sin x$ we get

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\times 0-1\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x \qquad \text{....(12.13)}$$

IV Let $y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x\times \frac{d}{dx}(1)-1\,\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\times 0-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x \cot x \qquad \text{....(12.14)}$$

12.7 Derivative of function of a function

If y is a function of u and u is a function of x.

then $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$.

Let δu, δy be the increments in u, y respectively corresponding to an increment δx in x.

We can write $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{\delta y}{\delta u}\times\dfrac{\delta u}{\delta x}$

Now $\delta u\to 0$ as $\delta x\to 0$

III $y = sec\ x = \dfrac{1}{cos x}$, ಎಂದಿರಲಿ.

$$u = 1, \quad v = cos\ x, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -sin\ x$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos\ x \times 0 - 1 \times (-sin\ x)}{cos^2 x} = \frac{sin\ x}{cos^2\ x}$$

$$= sec x\ tan\ x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(sec\ x) = sec\ x\ tan\ x \qquad ....(12 \cdot 13)$$

IV $y = cosec\ x = \dfrac{1}{sin\ x}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{sin\ x \times \frac{d}{dx}\ (1) - 1 \times \frac{d}{dx}\ sin\ x)}{sin^2 x}$$

$$= \frac{sin\ x \times 0 - cos\ x}{sin^2\ x} = -\frac{cos\ x}{sin^2\ x} = -\frac{cos\ x}{sin^2\ x}$$

$$= -cosec\ x\ cot\ x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\ (cosec\ x) = -cosec\ x\ cot\ x \qquad ....(12.14)$$

12.7 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

y, uವಿನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ u, xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

xನ ವೃದ್ಧಿ δxಗೆ u ಮತ್ತು yಗಳ ವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δu ಮತ್ತು δyಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\delta y}{\delta u} \times \dfrac{\delta u}{\delta x}$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು.

$\delta x \to 0$ ಆದಂತೆ $\delta u \to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta u — 0} \frac{\delta y}{\delta u} \times \lim_{\delta x — 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \quad \frac{du}{dx} \qquad \text{....(12·15)}$$

Examples : (1) $y = \sin\ (x^2+1)$

Let $u = x^2+1$

Then $y = \sin\ u$ where $u = x^2+1$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \cos\ u \times 2x = 2x\ \cos\ (x^2+1)$$

(2) $y = (x^3+3x^2+4)^7$

Put $x^3+3x^2+4 = u$

Then $y = u^7$

$$\frac{dy}{du} = 7u^6, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2+6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7u^6\ (3x^2+6x)$$

$$= 7(3x^2+6x)\ (x^3+3x^3+4)^6$$

(3) $y = sec^2 x$

Put $sec\ x = u$

Then $y = u^2$ where $u = sec\ x$

$$\frac{dy}{du} = 2u, \qquad \frac{du}{dx} = sec\ x\ tan\ x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \times sec\ x\ tan\ x$$

$$= 2\ sec\ x \times sec\ x\ tan\ x$$

$$= 2\ sec^2 x\ tan\ x$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \quad \frac{du}{dx} \qquad \ldots\ldots \quad (12.15)$$

<u>ಉದಾಹರಣೆಗಳು</u> : (1) $y = sin\ (x^2+1)$

$u = x^2 + 1$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ $y = sin\ u$, ಇಲ್ಲಿ $u = x^2 + 1$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \quad \frac{du}{dx}$$

$$= cos\ u \times 2x = 2x\ cos\ (x^2+1)$$

(2) $y = (x^3 + 3x^2 + 4)^7$

$x^3 + 3x^2 + 4 = u$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ.

ಆಗ $y = u^7$

$$\frac{dy}{du} = 7u^6, \ \frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7u^6 \times (3x^2 + 6x)$$

$$= 7(3x^2 + 6x)(x^3 + 3x^2 + 4)^6$$

(3) $y = sec^2 x$

$Secx = u$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ.

ಆಗ $y = u^2$ ಇಲ್ಲಿ $u = \sec x$

$$\frac{dy}{du} = 2u, \quad \frac{du}{dx} = secx\ tan\ x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2u\ \ secx\ tan\ x$$

$$= 2\ seex \times secx\ tan\ x$$

$$= 2\ sec^2 x\ tan\ x$$

12.8 A simple application in Mechanics

Suppose a particle moves along a straight line Ox. Its position P at any time t is given by its distance $s=OP$ from the fixed point O. This distance s is a function of the time variable t.

Let δs be the small displacement in a small interval of time δt. Then $\frac{\delta s}{\delta t}$ measures the *average speed* in that interval.

The *velocity* v at *time* t is given by

$$v = \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad \text{.... (12.16)}$$

The velocity v may also change from time to time. In other words v is also a function of t. The derivative of v with respect to the time t is called the *acceleration* of the particle. Denoting the acceleration by f, we have

$$f = \frac{dv}{dt} \qquad \text{.... (12.17)}$$

Example :—A particle moves in a straight line and its distance **s** *from a fixed point* **O** *on the line after* **t** *seconds is given by* **s=9 t—t³** *feet. Find (1) the velocity after* **t** *seconds (2) the initial velocity (3) the acceleration at the end of 2 seconds.*

$$s = 9t - t^3$$

$$\text{Velocity } v = \frac{ds}{dt} = 9 - 3t^2$$

$$\text{Acceleration } f = \frac{dv}{dt} = -6t$$

(1) The velocity after t seconds is $9-3t^2$ feet per second.

(2) The initial velocity is the velocity at time $t=0$ Hence initial velocity $=9-3\times 0=9$ feet per second.

12·8 ಚಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸುಲಭ ಅನ್ವಯ

ಒಂದು ಕಣವು Ox ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಯಾವುದೇ ಕಾಲ t ಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನ P ಯನ್ನು $OP=s$ ಎನ್ನುವ O ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರದಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈ s ಎನ್ನುವ ದೂರ t ಎನ್ನುವ ಕಾಲ ಚರದ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಅಲ್ಪಾವಕಾಶದ ಕಾಲ δt ಯಲ್ಲಿ Pಯು ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟ δs ಎಂದಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\frac{\delta s}{\delta t}$ ಎಂಬುದು ಆ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು.

$\therefore$ t ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗವು v ಎಂದಿದ್ದರೆ.

$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (12{\cdot}16)$$

ವೇಗ u ಸಹ ಕಾಲದೊಂದಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ. ಅಂದರೆ u ಸಹ t ಯ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. t ಯನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿ u ಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಣದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು f ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $f = \frac{dv}{dt}$ ಎಂದಾಗುವುದು $\quad \ldots\ldots \quad (12.17)$

ಉದಾಹರಣೆ. ಒಂದು ಕಣವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ. t ಸೆಕೆಂಡುಗಳನಂತರ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಣದ ದೂರವಾದ s ಅಡಿಗಳನ್ನು $s=9t-t^3$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ನೀಡುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ (1) t ಸೆಕೆಂಡುಗಳನಂತರ ಅದರ ವೇಗವೆಷ್ಟು? (2) ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವೇಗವೆಷ್ಟು? (3) 2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೆಷ್ಟು?

$$s=9t-t^3$$

$$\text{ವೇಗ}, \; v = \frac{ds}{dt} = 9-3t^2$$

$$\text{ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ}, f = \frac{dv}{dt} = -\,6t$$

(1) t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ವೇಗ $=$ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $(9-3t^2)$ ಅಡಿಗಳು.

(2) ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವೇಗವೆಂದರೆ $t=0$ ಆದಾಗಿನ ವೇಗ.

$\therefore$ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವೇಗ $=9-3\times 0=$ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 9 ಅಡಿ.

(3) Acceleration at the end of 2 seconds = value of f for $t=2$; *i.e.* $-6\times 2=-12$ feet per second per second.

Exercises 12.2

In question 1—6, find *from first principles* the derivatives of the given functions.

(1) $2x^2-6x$

(2) x^4

(3) $\frac{1}{x+1}$

(4) $\sin 2x$

(5) $x \cos x$

(6) $\frac{x}{x+4}$

Find the derivatives of the following functions (questions 7-16) applying the theorems of para 12.6.

(7) $x^{-5}+x^2$

(8) $x^6-2x^4+3x^2-4$

(9) $2\sqrt{x}+3 \tan x$

(10) $x^7 \cot x$

(11) $x^{-3} \sec x$

(12) $(x^{-1}+\sin x) \tan x$

(13) $\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

(14) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(15) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$

(16) $\frac{x+\sin x}{\tan x}$

In questions 17—22, find the derivatives of the given functions using the theorem for the derivative of a function of a function (para 12.7)

(17) $(x^3+1)^9$

(18) $\tan^2 x$

(19) $\cos x^3$

(20) $\operatorname{cosec} (3x^2)$

21) $(2x^2+3x-5)^{10}$

(22) $\sin (x^3+x^2+x+1)$

(23) If $f(x)=2x(3x^2+4)$, find $f'(0)$, $f'(1)$ and $f'(-2)$,

(3) 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ
= ($t=2$ ಆದಾಗ f ನ ಬೆಲೆ)
$= -6 \times 2 =$ ಸೆಕೆಂಡು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ -12 ಅಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 12.2

1—6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ತ ಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.—

(1) $2x^2-6x$, (2) x^4 (3) $\frac{1}{x+1}$, (4) $\sin 2x$, (5) $x \cos x$ (6) $\frac{x}{x+4}$

12.6 ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ 7—16 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) $x^{-5}+x^2$, (8) $x^6-2x^4+3x^2-4$

(9) $2\sqrt{x}+3 \tan x$ (10) $x^7 \operatorname{Cot} x$

(11) $x^{-3} \operatorname{Sec} x$ (12) $(x^{-1}+\sin x)\tan x$

(13) $\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; (14) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(15) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ (16) $\frac{x+\sin x}{\tan x}$

17—22 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು (12.7ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ) ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(17) $(x^3+1)^9$ (18) $\tan^2 x$

(19) $\cos x^3$ (20) $\operatorname{cosec} 3x$

(21) $(2x^2+3x-5)^{10}$ (22) $\sin(x^3+x^2+x+1)$

(23) $f(x)=2x(3x^2+4)$ ಎಂದಾದರೆ,

$f'(0)$, $f'(1)$ ಮತ್ತು $f'(-2)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(24) Find the slope of the tangent to the curve $y=\frac{1}{x^2}$ at the point $(-2, \frac{1}{4})$,

(25) Find the slope of the curve $y=ax^2+bx+c$ at any point. At what point is the tangent parallel to the x—axis?

(26) A point moves in a straight line according to the law $s=15t+2t^2$. Find (*a*) its velocity at the end of t seconds (*b*) its initial velocity (*c*) its acceleration at the end of 5 seconds.

(27) A ball is thrown vertically upwards with an initial speed of 96 feet per second. The distance s it moves in t seconds is given by $s=96t-16t^2$. Find (1) the time it takes to reach the highest point where the speed is zero, (2) the distance between the lowest and highest point of its patch.

(28) A ball is dropped from the top of a building 144 feet high. The distance s it falls in time t is given by $s=16t^2$. Find (1) the time taken to reach the ground, (2) the velocity with which it hits the ground (3) the acceleration of the ball.

(24) $y=\frac{1}{x^2}$ ವಕ್ರ ರೇಖೆಗೆ $(-2, \frac{1}{4})$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(25) $y=ax^2+bx+c$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಓಟವೆಷ್ಟೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ?

(26) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವು $s=15t+2t^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ಚಲಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ (a) t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗವೆಷ್ಟು ? (b) ಅದರ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವೇಗವೆಷ್ಟು ? (c) 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೆಷ್ಟು?

(27) ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆಯಲಾಯಿತು ಅದರ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ವೇಗ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 96 ಅಡಿಗಳು, t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಚಲಿಸಿದ ದೂರ $s=96t-16t^2$ ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ (1) ಅತ್ಯುನ್ನತ ಸ್ಥಾನವನು ತಲುಪಲು (ಅಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಶೂನ್ಯ) ಅದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು ? (2) ಅದರ ಪಥದ ಅತಿಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಅತ್ಯುನ್ನತ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವೆಷ್ಟು ?

(28) 144 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಕೈಬಿಡಲಾಯಿತು. t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಚಲಿಸಿದ ದರ s ನ್ನು $s=16t^2$ ಈ ನಿಯಮ ತಿಳಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ (1) ನೆಲ ಸೇರಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಲವೆಷ್ಟು ? (2) ನೆಲವನು ಅದು ಬಡಿಯುವಾಗ ಅದರ ವೇಗವೆಷ್ಟು ? (3) ಚೆಂಡಿನ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೆಷ್ಟು ?

ANSWERS

CHAPTER 1

Exercises 1·1 Page 6

1 $T \equiv$ True, $F \equiv$ False. (i) F, (ii) T, (iii) T, (iv) F, (v) F, (vi) T, (vii) T, (viii) F.

2 (*a*) $\{x/x$ is a mathematics teacher in our college$\}$

(*b*) $\{x/x$ is a divisor of $12\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(*c*) $\{x/x \in N$, x is a multiple of 5 and $x < 50\}$
$\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$

(*d*) $\{x/x$ is a prime number and $x < 20\}$
$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

3 (*a*) $\{x/x$ is a citizen of India$\}$

(*b*) $\{x/x$ is a past student of our college$\}$

(*c*) $\{x/x = \frac{p}{q}, p, q \in N$ and $0 < x < 1\}$

(*d*) $\{x/x$ is a prime number and $x > 25\}$

The tabulation method cannot be applied as the number of elements in each case is too large.

4 (*a*) $A = \{-1, 1\}$

(*b*) $A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

(*c*) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(*d*) $\{4, 9, 16, 25, 36\}$

5 $A = C$, $D = F$, $E = G$

6 (*a*) Infinite (*b*) Finite (*c*) Infinite (*d*) Finite

Exercises 1·2 Page 12

1 (i) $\{5, 7, 9\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 9\}$, $\{7, 9\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, ϕ

(ii) $\{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \phi$, (iii) $\{0\}, \phi$, (iv) ϕ

2 (i) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 0\}$

(ii) $\{3, 4, 6, 7, 8\}$, (iii) $\{0\}$

(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, (v) $\{0, 1, 2, 9\}$,

(vi) $\{1, 2, 9\}$, (vii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(viii) $\{1, 2, 3, 5, 9\}$, (ix) ϕ,

(x) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, (xi) $\{3\}$

3 $C \subset Q$, $T \subset Q$, $R \subset Q$, $P \subset Q$, $C \subset R$, $C \subset P$, $R \subset P$.

4 $E \cap R = \phi$, $B \cap E = \phi$, $T \cap R = R$, $T \cup E = T$

5 (i) $A \cup U = U$, (ii) $A \cap U = A$, (iii) $A \cup \phi = A$, (iv) $A \cap A = \phi$, (v) $A \cup A = A$, (vi) $A \cap A = A$, (vii) $A \cup A' = U$, (viii) $A \cup A' = \phi$

Exercises 1·3 Page 19

3 (*a*) Valid, (*b*) Not valid (*c*) Not valid

4 (*a*) Intelligent people with dark eyes are not bad tempered.

(*b*) Some old things are beautiful

5 (*a*) 350, (*b*) 58

CHAPTER 2

Exercises 2·1 Page 28

1 0·16, 0·75, 0·0625, 0·0125, $0·\dot{5}7142\dot{8}$, $0·\dot{2}\dot{7}$, $0·\dot{2}3076\dot{9}$; $0·\dot{2}94117647058823\dot{5}$

(1) $\frac{1441}{20}$ (2) $\frac{7}{5000}$ (3) $\frac{115003}{10000}$ (4) $\frac{50617}{9990}$

(5) $\frac{13448}{999}$ (6) $\frac{1173109}{999990}$

Exercises 2·2 Page 38

1 (1) $\{\cdots, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(2) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

(3) $\{3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

(4) $\{\ldots\ldots, -4, -3, -,2\}$

(5) $\{2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

2 (1) 10 (2) 2 (3) 65 (4) -9 (5) 0

Exercises 2·3 Page 45

I (1) $52-28i$ (2) $12+i$

II $\frac{2}{13}+i\left(-\frac{3}{13}\right)$, $-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$, $\frac{3}{13}+i\,\frac{2}{13}$, $\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}+i\,\frac{1}{5}$

III i, $\frac{1}{5}+i\left(-\frac{8}{5}\right)$, $-1+i$, $\frac{1}{2}-i$, $\frac{1}{100}(46+28i)$

IV $\frac{1}{5}(8+i)$, $\frac{1}{5}(7+9i)$, $\frac{1}{2}(1+3i)$, $\frac{1}{100}\{51-32i\}$,
$\frac{1}{50}\{-14+23i\}$

V $\frac{1}{5}(8-i)$, $\frac{1}{5}(7-9i)$, $\frac{1}{2}(1-3i)$, $\frac{1}{100}(51+32i)$
$\frac{1}{50}\{-14-23i\}$

VI $\frac{1}{13}(8-i)$, $\frac{1}{10}(7-9i)$, $\frac{2-6i}{5}$, $\frac{1}{29}(51+32i)$,
$-\frac{1}{50}(14+23i)$.

CHAPTER 3

Exercises 3.1 Page 49

(1) $\frac{1}{7}(2^{13}\cdot 3^4\cdot 5^3)$ (2) $y^5z^4/48ab^4x^5$

(3) $a^{x^2+y^2-z^2-xy+yz}$ (4) $-\left(\frac{a^2-b^2}{x-y}\right)^2$

(5) $\left(\frac{3}{2}\right)^7 \frac{a^{13}z^2}{x^{10}y^8}$

Exercises 3.2 Page 56

I (1) $10x^{4/3}$ (2) $x^3/y^{\frac{1}{3}}$ (3) $100000,\ 25,\ \frac{1}{27}$

(4) $\sqrt{\dfrac{a^{21}}{b^3}}$ (5) $a^{\frac{1}{2}}yz^{2/7}$ (6) $\dfrac{1}{98}$

II (1) $a^{11/10}\,b^{-17/30}\,c^{-8/15}$ (2) $(a/x)^{2/3}$ (3) $\frac{16}{15}$

(4) 2^{n^2-3n+3} (5) 3^{n+1} (6) $b^{1/6}/a$

III (1) $2^{2x}-2+2^{-2x}$ (2) $a^{1/2}+2a^{1/4}b^{3/2}+b^3$

(3) $5\sqrt{x}+4\sqrt[3]{y}$ (4) $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}-x^{1/3}y^{1/3}$

(5) $x+y$ $-y^{1/3}z^{1/3}-z^{1/3}x^{1/3}$

Exercises 3.3 Page 61

I (i) $2\sqrt{3}$ (ii) $2\sqrt{10}$ (iii) $6\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt[3]{4}$

(v) $2\sqrt[3]{3}$ (vi) $3\sqrt[4]{2}$

II (i) $\sqrt[3]{24}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{9}{5}}$ (iii) $\sqrt{\dfrac{539}{2}}$

(iv) $\sqrt{48}$ (v) $\sqrt[3]{960}$.

III 1) $\sqrt{12}>\sqrt[3]{24}$ (2) $\sqrt[4]{12}>\sqrt[3]{6}$

(3) $\sqrt{20}>\sqrt[3]{50}$ (4) $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}>\sqrt{5}$

(5) $2\sqrt{5}>3\sqrt{2}>\sqrt{10}$ (6) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\sqrt{2}$

IV (1) $7\sqrt{3}$ (2) $2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)$

(3) $6\sqrt{5}-\sqrt{10}$

Exercises 3·4 Page 68

I (1) $216\sqrt[3]{4}$ (2) $12(\sqrt{6}-1)$

(3) $15\sqrt{7}-14\sqrt{5}$ (4) $17\sqrt{ax}-12x-6a$

(5) $27-4\sqrt{35}$

(6) $(x^2-x+6)+\sqrt{x-1}\,(2x+3)$

II $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{6}$

III (1) $2-\sqrt{3}$, $-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$, $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

Rationalising factors are:

$2+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(2) (1) 18 (2) $(x^2+4x+1)(x^2-3+2\sqrt{2})$

(3) $\dfrac{2\sqrt{b}}{b-a^2}$

IV (1) 0 (2) $\dfrac{14\sqrt{2}}{5}$ (3) 12 (4) 9

(5) $3\sqrt{3}$ (6) $10\sqrt{2}$

VI (1) $137+12\sqrt{35}+12\sqrt{2}+20\sqrt{6}$

(2) $4\sqrt{x^2-x}$ (3) $(1+\sqrt{1-x^4})(1+\sqrt{1-x^{-4}})$

Exercises 3.5 Page 77

I (1) $5-\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{5}$ 2

(4) $3-\sqrt{5}$ (5) $\sqrt[4]{5}\,(1+\sqrt{2})$

(6) $\sqrt[4]{3}\,(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

II (1) $\sqrt{3}-1$ (2) $2+\sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(4) $2-\sqrt{3}$ (5) $\sqrt{5}+1$ (6) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

III (1) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(3) $1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (4) $1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Exercises 3.6 Page 82

III (1) 0.534 (2) 0.8133 (3) 1.9471 (4) 0.2888

(5) $\overline{54}.4768$ (6) 5.4914 (7) $\overline{2}.8256$ (8) 0.2295

(9) 0.5500 (10) 3.1020

IV (1) 3.8055 (2) 8.0826 (3) $\overline{1}.5300$ (4) 1.128

(5) 0.2292

Exercises 3.7 Page 94

I (1) 1173 (2) 2.331 (3) 3.732 (4) 706000

(5) 0.2056 (6) 8966 (7) 2.114

II (1) 3.0326 (2) —0.5513 (3) 5.323 (4) 0.8642

(5) —3.784 (6) 1.149, 0.1053 (7) 0.4238, —0.3228 (8) 0.602, —1.398 (9) —0.6990, 0.3010 (10) $\sqrt{5}$

IV (1) 26 (2) 13 (3) 9

V 21

VI 147.8 c.c.

VII 1420 gms

VIII (*a*) 3.135, 1.740, 4.348, 3.332, 2.417

(*b*) (1) 5.431 (2) 2.284 (3) 0.9656

CHAPTER 4

Exercises 4.1 Page 108

2 (1) $x^2-3x-28=0$ (2) $4x^2-20x+25=0$

(3) $bx^2-(4ab+7)x+28a=0$

(4) $4x^2-28x+47=0$ (5) $9x^2-6x+2=0$

(6) $9x^2-18x+11=0$

3 (1) $b=\pm\frac{4}{5}\sqrt{2}$ (2) $a=-2$ (3) $b^2=27a$

(4) $\lambda=4$ (5) $15q^2=64r$

4 (i) $-bc/a^2$ (ii) $-\frac{b}{a^2}\sqrt{b^2-4ac}$ (iii) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$

(iv) $\frac{1}{a^3}(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}$ (v) $\frac{(3abc-b^3)^2-2a^3c^3}{a^6}$

(vi) $(3abc-b^3)/a^2c$

5 (1) $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ (2) $qx^2-px+1=0$

(3) $x^2-(p+2h)x+(h^2+ph+q)=0$

(4) $x^2-kpx+k^2q=0$ (5) $x^2-4px+(3p^2+4q)=0$

(6) $(2p^2+q)x^2-3px+1=0$

(7) $(2p^2+q)x^2-6qx+(9q-2p^2)=0$

(8) $q^2x^2-(p^2-2q)(q^2+1)x+\{(q^2-1)^2+(p^2-2q)^2\}=0$

(9) $q^2x^2-(p^3-3pq)x+q=0$

(10) $(3p^2+4q)x^2-(6p^2+8q+4p)x+(3p^2+4q+4p+1)=0$

12 $(4aq-2bp)(2p-a)=(b-4q)^2$

Exercises 4.2 Page 117

1 (1) $x<1-\sqrt{3},\ x>1+\sqrt{3}$ (2) $x<-3,\ x>-1$

(3) $0<x<8$ (4) $-4<x<1$

2 (1) $\frac{-5-\sqrt{41}}{4}<x<\frac{-5+\sqrt{41}}{4}$

(2) $-\frac{1}{3}<x<3$ (3) $x<-2,\ x>2$

(4) $\frac{1-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

5 $-12x^2+30x-12$ 6 $-2x^2+8x-26$

7 -3

CHAPTER 5

Exercises 5.1 Page 120

1 9,11 **2** Not an A.P. **3** 17,23 **4** $7\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$
5 Not an A.P. **6** 3,6 **7** 7.9, 8.5
8 $2+2x$, $2+3x$ **9** Not an A.P. **10** $4x+6$, $5x+9$
11 50 **12** 81 **13** 60 **14** -38 **15** -69
16 52 **17** -150 **18** $19x+17y$ **19** $10x+33$
20 $13x+44$

Exercises 5.2 Page 123

1 30, 165 **2** 42, 462 **3** 57, 352 **4** 54, 315
5 -17, -9 **6** -29, 187 **7** 20, 26 **8** 79, 805
9 30.6, 369.6 **10** 95.3, 1512.8 **11** $d=3$, $S=205$
12 $n=17$, $S=442$ **13** $a=-19$, $S=121$ **14** $l=-48$, $S=-300$ **15** $n=17$, $d=4$ **16** $n=16$, $a=5$
17 3240 **18** 2400 **19** 1050 **22** 903 **23** Rs 19,000
24 90 **25** 1024 ft., 240 ft. **26** 1105

Exercises 5.3 Page 126

1 11,17 **2** 2, 9, 16, 23, 30, 37 **3** -1, -6, -11, -16 **4** 8, 12. 16,........36, 40 **5** -9, -7, -5....5, 7, 9 **6** 14,5,-4,-13....-40, -49 **7** 7/3,

14/5, 7/2, 14/3, 7 **8** 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10
9 —1, 1, 1/3, 1/5, 1/7 **10** $-\frac{1}{4}$, —1, 1/2, 1/5, 1/8,....
1/20 **11** 5, 21/5 ; 1, —15 ; —4, 5

Exercises 5.4 Page 129

1 48, 93 **2** 1701, 2548 **3** 16/3, 211/3
4 —243, —182 **5** 1, 61 **6** —32/81, 133/81
7 6, 12, 24 **8** 1, 7, 49 **9** 1/2, —2, 8, —32
10 1, 2/3, 4/9, 8/27 **11** 64, 16, 4 **12** 9, 3, 1,
1/3, 1/9 **14** 2, —7/2 **15** $a=2/49$, $S=114\frac{16}{49}$
16 $n=6$, $S=47\frac{1}{4}$ **17** $n=3$, $l=16/3$ **18** $a=3/2$,
$l=-4/9$ **19** $n=6$, $l=96$ **20** $a=-32$, $n=6$
21 12763 **22** Rs 9396 **23** Rs 5270-76,
Rs 21,978-36

Exercises 5.6 Page 134

1 $\frac{1}{4}$ **2** 81 **3** 128/5 **4** 16/3
5 —44/3 **6** 2/9 **7** 1/6 **8** 35/6 **9** —24.3
10 5/8 **11** 2/9 **12** 3 **13** 409/99 **14** 123/999
15 136/33 **16** 4/11 **17** 8/11 **18** 301 1/2 ft.
19 128 sq. ins.

CHAPTER 6

Exercises 6.1 Page 141

1 64 **3** 840 ; 480 ; 480 **4** $\underline{/11}=39916800$
5 ${}_{40}P_4=2193360$ **6** (*a*) 120 (*b*) 12 **7** (*a*) 720 (*b*) 72
8 $26^3.10^4=175760000$ **9** 240 **10** 120 **11** 48
12 ${}_{26}P_3 \cdot {}_{10}P_4=78624000$ **I3** (*a*) $\dfrac{\underline{/8}}{\underline{/2}\ \underline{/2}\ \underline{/2}}=5040$

(b) $\dfrac{\underline{|11}}{\underline{|2}\ \underline{|2}\ \underline{|2}} = 4989600$ 14 $\dfrac{\underline{|8}}{2} = 20160$

15 $\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|2}\ \underline{|3}\ \underline{|3}} = 560$ 16 $\underline{|6}\ \underline{|4}\ \underline{|3}\ \underline{|3} = 622080$

17 (a) 1440 (b) 3600

Exercises 6·2 Page 146

1 (a) 56 (b) 210 (c) 300 2 31 3 ${}_{30}C_4 = 27405$

4 90 5 980 6 1848 7 120 8 26

9 90 10 84 11 105 12 ${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 = 34650$

CHAPTER 8

Exercises 8.1 Page 155

1 $1+7x+21x^2+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$

2 $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

3 $64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

4 $x^4-4x^2+6-4x^{-2}+x^{-4}$

5 $a^{-6}+6a^{-5}b^{-2}+15a^{-4}b^{-4}+20a^{-3}b^{-6}+15a^{-2}b^{-8}$
$+6a^{-1}b^{-10}+b^{-12}$

6 $x^{5/2}+5x^{3/2}+10x^{\frac{1}{2}}+10x^{-\frac{1}{2}}+5x^{-3/2}+x^{-5/2}$

7 $a^4x^4-4a^3bx^3y+6a^2b^2x^2y^2-4ab^3xy^3+b^4y^4$

8 $a^{5/2}-5a^2b^{-\frac{1}{2}}+10a^{3/2}b^{-1}-10ab^{-3/2}+5a^{\frac{1}{2}}b^{-2}-b^{-5/2}$

9 $\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^3y}{6}+\dfrac{x^2y^2}{6}+\dfrac{2xy^3}{27}+\dfrac{y^4}{81}$

10 $a^6x^3-6a^5bx^{5/2}y^{\frac{1}{4}}+15a^4b^2x^2y^{\frac{1}{2}}-20a^3b^3x^{3/2}y^{3/4}+15a^2b^4xy$
$-6ab^5x^{\frac{1}{2}}y^{5/4}+b^6y^{3/2}$

11 $-8064a^5b^5$ 12 $5148x^8$ 13 ${}_{16}C_6 2^6 3^{10} x^6$

14 $-\dfrac{63}{8}x^{10}$ 15 ${}_{15}C_6 2^6 3^9 x^9$ 16 ${}_{11}C_2 2^9 x^7$

17 ${}_{10}C_5\ 2^5 3^5 x^5$ 18 $-448x^5$ 19 240 21 1.0406

22 ·904 23 1.267

CHAPTER 9

Exercises 9.1 Page 159

1 $\dfrac{2}{x-4} - \dfrac{1}{x+3}$ **2** $\dfrac{5}{x+5} - \dfrac{2}{x-2}$

3 $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$ **4** $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x-1}$

5 $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{2x-3}$ **6** $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3x+2}$

7 $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

8 $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{(x-2)^2} + \dfrac{4}{x+3}$ **9** $\dfrac{3}{(x+3)^2} - \dfrac{5}{(x+3)^3}$

10 $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x^2+1}$ **11** $\dfrac{1}{13}\left[\dfrac{7x+10}{x^2+3} - \dfrac{14}{2x-1}\right]$

12 $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x+3}$ **13** $1 - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x-4}$

14 $x + \dfrac{5}{x+5} - \dfrac{2}{x-2}$ **15** $2 - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-3}$

16 $x + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

CHAPTER 10

Exercises 10.1 Page 161

1 -2 **2** -16 **3** 3 **4** 21 **5** -20
6 b^2+a^2 **7** 0 **8** a^2-b^2 **9** $3\frac{3}{5}$ **10** $\frac{4}{5}$

Exercises 10.2 Page 163

1 (*a*) $a_3A_3-b_3B_3+c_3C_3$ (*b*) $-b_1B_1+b_2B_2-b_3B_3$
(*c*) $c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3$

2 -9 **3** -14 **4** -12 **5** -300 **8** (*a*) $\frac{7}{2}$
(*b*) 14 **9** $\frac{5}{2}$

Exercises 10·3 Page 168

1 (*a*) Rows of one are the columns of the other.

(*b*) Second determinant is obtained from first by adding 1st and 2nd columns to 3rd column.

2 (*a*) 1st column = 3rd column (*b*) Third row is proportional to 1st row (*c*) 3rd column is proportional to 1st column.

3 (*a*) -20592 (*b*) 24192 (*c*) 0 **4** 24

5 (*a*) 6 (*b*) -5 (*c*) 12 **6** 10 **7** a, b

Exercises 10·4 Page 174

1 $x=2, y=-2$ **2** $x=-1, y=1$

3 $x=-3, y=3$ **4** $x=-1, y=0, z=2$

5 $x=2, y=1, z=-1$ **6** $x=-1, y=-1, z=-2$

CHAPTER 11

Exercises 11·2 Page 185

1 $-46, -14, -4, 74$ **2** 6, 4, 2 **4** Continuous

5 Discontinuous **6** 4 **7** 3 **8** 7 **9** $\frac{1}{2}$

10 0 **11** -3 **12** $3a^2$ **13** -32 **14** 2 **15** n

16 1 **17** m/n **18** a/b

CHAPTER 12

Exercises 12·1 Page 203

1 $35x^4 + \dfrac{8}{3x^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2 $-\dfrac{30}{x^6} + 30x^4$ **3** $-\dfrac{20}{x^5} + 25x^4$

4 $3x^2$ **5** $4x^3-3x^2-1$ **6** $4x^3+3x^2+1$

7 $2x-1$ **8** $[2x \cos x + x^2 \sin x]/\cos^2 x$

9 $-\dfrac{1}{1+\sin x}$

10 $4x^3 \cos x - x^4 \sin x$

11 $[x^2 \cos x - 2x \sin x + \cos x]/(x^2+1)^2$

12 $\dfrac{(31+12x-11x^2)}{(x^2-4x+5)^2}$

Exercises 12·2 Page 208

1 $4x-6$ 2 $4x^3$

3 $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

4 $2 \cos 2x$ 5 $\cos x - x \sin x$

6 $\dfrac{4}{(x+4)^2}$

7 $2x-5x^{-6}$ 8 $6x^5-8x^3+6x$

9 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3 \sec^2 x$ 10 $7 x^6 \cot x - x^7 \operatorname{cosec}^2 x$

11 $x^{-3} \sec x \tan x - 3x^{-4} \sec x$

12 $\dfrac{1}{x} \sec^2 x + \tan x \,(\sec x + \cos x) \dfrac{-1}{x^2} \tan x$

13 $\dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

14 $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ 15 $\dfrac{1}{1+\cos x}$

16 $[\tan x\,(1-\sec x) + \sin x - x \sec^2 x]/\tan^2 x$

17 $27x^2 (x^3+1)^8$

18 $2 \tan x \sec^2 x$ 19 $-3x^2 \sin x^3$

20 $-6x \operatorname{cosec} (3x^2) \cot (3x^2)$

21 $10 (4x+3) (2x^2+3x-5)^9$

22 $(3x^2+2x+1)\cos(x^3+x^2+x+1)$

23 8, 26, 80 24 $\frac{1}{4}$

25 $(2ax+b)$, $x=-\frac{b}{2a}$, $y=\frac{-b^2}{4a}+c$

26 (a) $(15+4t)$ feet/sec (b) 15 feet/sec
(c) 4 feet/sec^2

27 (1) 3 secs (2) 144 feet

28 (1) 3 secs (2) 96 feet/sec (3) 32 feet/sec^2.

INDEX—ಶಬ್ದ ಸೂಚಿ

ERRATA—ತಪ್ಪೊಪ್ಪೋಲೆ

Page ಪುಟ	Line ಗೆರೆ	For ತಪ್ಪು	Read ಒಪ್ಪು
23 Eng	23	$0+x,\ x+0$	$0\times x,\ x\times 0$
33 Eng	4	$\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}$	$\dfrac{1}{a}$
38 Kan	14	$\|0\|=0$	$\|9\|=9$
45 Eng	18	2	Z_2
48 Kan	ಕೊನೆ	$\dfrac{a}{a^3b^4y^9}$	$\dfrac{x}{a^3b^4y^9}$
50 Eng	6	$\left(a^{p/q}\right)$	$\left(a^{p/q}\right)^q$
50 Kan	8	$\dfrac{p}{a} = \sqrt[p]{a^p}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
55 Eng	8	(3^{2°)	$(3^2)^\circ$
73 Eng	13	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{2}$
83 Eng	10, 11, 12,	1, 2, 3	—1, —2, —3
93 Kan	5	3010	*log* 3010
94 Eng	8	$\log_e 10$	$\log_{10} e$
97 Eng	10	$-\dfrac{a}{b}$	$-\dfrac{b}{a}$
99 Eng	last	$-\dfrac{b\pm i\sqrt{p}}{2a}p$	$\dfrac{-b\pm i\sqrt{p}}{2a}$
102 Kan	10	$\dfrac{i\sqrt{3}}{5}$	$\dfrac{2+i\sqrt{3}}{5}$
118 Eng	20	Cannot	must

Page ಪುಟ	Line ಗೆರೆ	For ತಪ್ಪು	Read ಒಪ್ಪು
118 Kan	20	ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು	ಇರಬೇಕೆಂದು
121 Eng	Last		$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\,d\}$
126 Eng	26		(add) ar^{n-1}
126 Kan	25		ಈ ಪದ ar^{n-1} ಸೇರಿಸಿ
153 Kan	18	(rನೆಯ ಪದ)	${}_nC_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$
155 Eng	17	$(x2-2)^6$	$\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^6$
159 Kan	6	$C=1$	$C=-1$
178 Eng	28	$y-l$	$\lvert y-l \rvert$
178 Eng	29	$x-a$	$\lvert x-a \rvert$
179 Eng	3	*lim*	If
183 Kan	ಚಿತ್ರ 11.4		(ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವಂತೆ)
189 Eng	3	$\frac{p}{q}a^{\frac{p-1}{q}}$	$\frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}$
189 Eng	Example (1)		$\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{x-a}=5a^4$
190 Eng	last line		$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$
201 Eng	18		$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{v\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}-u\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}}{v\lim_{\delta x\to 0}(v+\delta v)}$

WD P4512—GPB—10,000—12-3-68

BANGALORE :
PRINTED BY THE DIRECTOR OF PRINTING, STATIONERY AND PUBLICATIONS AT THE GOVERNMENT PRESS
1968